МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

ЗА ЕДИН ПОДХОД КЪМ ТЕКСТОВИТЕ ЗАДАЧИ В УЧИЛИЩЕ

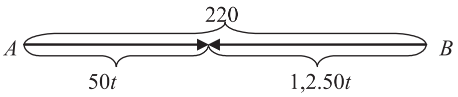
Асен Велчев

Представен е един нов подход към текстовите задачи, който е предложен за извънкласната работа с ученици от 10-ти – 12-ти клас от профил математика. Цели на подхода: усилване на творческо-изследователското мислене, откриване на неподозирани сходства между различни типове текстови задачи, както и пропедевтика на понятията изоморфизъм и принцип за дуалност.

Увод. Идеите за тази статия се появиха в опит за изнамиране на унифициран подход при решаване на всички или почти всички видове текстови задачи (за движение, тръби и басейни, сплави, работа и т.н.). За целта са търсени общи белези в постановката на задачите и сходства в математическите им модели. Тук са изложени авторови наблюдения и идеи на ниво първи стъпки в областта. За да са подходящи тези идеи за реализация с ученици обаче, е нужно учителите сами да бъдат на високо професионално ниво както математически, така и методически. Самите ученици пък трябва да могат с лекота да боравят с всички видове текстови задачи, при това не механично, а с разбиране. Предполагаемите ученици тук са поне 10-ти клас, профил математика.

Да започнем със задачите от път, скорост и време, които са най-често срещани в учебниците и сборниците по математика [1, 2, 3] и мн. др.

Пример 1 (път, скорост, време). Разстоянието между селищата A и B е 220 км. От A за B тръгва камион със скорост 50 км/ч, а от B за A, в същия час, тръгва лека кола със скорост 20% по-висока от скоростта на камиона. Намерете след колко време камионът и леката кола ще се срещнат (зад. 220, стр.59 в [2]).

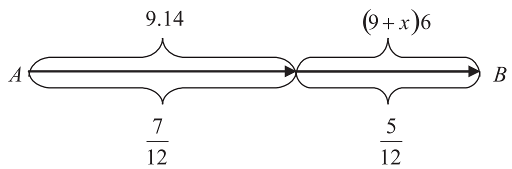


Фиг. 1. Графично представяне на разстоянията в Пример 1

На фиг. 1 общото разстояние $AB = 220$ км е изобразено над отсечката AB. Ако приемем за t времето за път до срещата, то камионът е изминал до този момент $50t$ км, защото скоростта му е 50км/ч, а колата – $1{,}2.50t$ км, т.к. нейната скорост е 120%, т.е. 1,2 пъти скоростта на камиона. Очевидно $50t + 1{,}2.50t = 220$, т.е. $110t = 220 \Leftrightarrow t = 2$, т.е. след 2 часа.

Пример 2 (работа). Девет зидари изграждат 7/12 от един строеж за 14 дни. Още колко зидари трябва да се присъединят към първите, за да се свърши цялата работа за 20 дни? (зад. 3, стр. 153 в [2])

Добрите ученици, особено ако са ръководени от опитни учители, би следвало и при досегашния начин на работа да схващат, че броят работници е определящ за *скоростта* на извършването на работата, а последната е аналог на *изминатия път* в задачите за движение, а времето е време и в двата случая. Видимото сходство между задачите от работа и движение е най-голямо, така че подготвянето на общия метод за решаване на различни видове текстови задачи би било добре да започне от задачи за движение, а веднага след тях – за работа. Учениците може да бъдат провокирани да се опитат да направят чертеж за тази задача, подобен на фиг. 1. Това може да ги озадачи, тъй като те до сега са срещали чертежи само при задачи от движение. След това учителят може да ги попита дали има аналогия между величините в двата вида задачи и след това да им я съобщи, или да измайстори някакъв методически похват, за да ги доведе до този извод, което би било още по-добре.

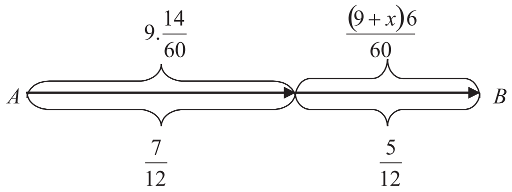


Фиг. 2. Графично представяне на извършената работа в Пример 2

Времето на фиг. 2 е дадено в дни. Работата е изразена по два начина – най-горе на фигурата в човекодни, а долу – като относителен дял от цялата. За 14 дни 9 работници изработват 7/12 от цялата, а новия брой работници, които са старите 9 плюс новите x, за още 6 дни довършват работата, т.е. извършват 5/12 от нея. От схемата е видно, че $\dfrac{9.14}{(9+x)\,6} = \dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}}$. След преработка получаваме $\dfrac{21}{9+x} = \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow 9 + x = 15 \Leftrightarrow x = 6$. После учителят може да накара учениците да преобразуват същата задача в задача от движение, като се запазят стойностите на дадените величини и математическият модел за решаване, както и крайният резултат. Ако нивото на учениците не е чак такова високо, първите няколко задачи може да преформулира учителя с участието на учениците, а за следващите – да ги стимулира да правят това все по-самостоятелно.

Пример 2′ (задачата от работа, преобразувана в задача за движение). Бегач пробягал 7/12 от една писта със скорост 9 км/ч за 14 мин. С колко км/ч трябва да си увеличи скоростта, за да финишира той на 20-тата минута?

Тук може да считаме, че е известно как се решават конкретните задачи от път, скорост и време, и да се задоволим само с изготвянето на чертеж и математически модел. Тук нов чертеж не е нужен. Фиг. 2 е достатъчна и за Пример 2', но с незначителна корекция: $(9 + x)$ км/ч е увеличената скорост. Минутите за бягане, превърнати в часове, са съответно $14/60$ за първите $7/12$ от пистата и $6/60$ – за останалата част. Получаваме Фиг. $2'$:



Фиг. $2'$. Графично представяне на Пример $2'$

От схемата се вижда, че $\dfrac{\frac{9.14}{60}}{\frac{(9+x)\,6}{60}} = \dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}}$. Не бива да се смущава нито учителят, нито учениците от такива първоначални дребни различия в математическите модели, които произтичат от различните мерни единици. Щом има осезаем изоморфизъм, то непременно всякакви различия от подобен характер ще бъдат преодолени. С преработка получаваме $\dfrac{9.14}{(9+x)\,6} = \dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}}$, а оттук $\dfrac{21}{9+x} = \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow 9+x = 15 \Leftrightarrow x = 6$ (вж. Пример 2).

Пример 3 (тръби и басейни). Училищен басейн се пълни от една тръба за 4 ч, а от друга – за 6 ч. Да се намери каква част от басейна ще остане празна, ако двете тръби са били отворени 1 час (зад. 56, стр. 90 в [1]).

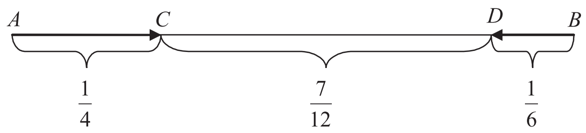
Задачата може да се реши с аритметика: за един час едната тръба пълни $1/4$, а другата – $1/6$ от басейна, т.е. $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ части общо ще бъдат пълни. Останалите $7/12$ ще останат празни, което се и търси.

При задачите от тръби и басейни скоростта на изпразване на басейн зависи от нивото на водата, защото с промяната му се изменя налягането, от което зависи тази скорост. Върху този факт ми обърна внимание доц. Чавдар Лозанов от ФМИ, СУ, за което му изказвам благодарност. Скоростта на пълнене би била константа, ако тръбите са през цялото време над нивото на водата. Не е зле учителите да побеседват за това с по-изявените ученици. Може да се направи уговорка тръбите да са над нивото на водата, дори при пълен басейн.

При задачите от тръби и басейни също има аналогия с тези за движение: изминалото време за пълнене – с времето за движение; часовете, за които една тръба пълни басейна задава скорост, а частите от басейна, които са напълнени, са аналогични на части от пътя, който трябва да се измине.

Пример $3'$ (задачата от тръби, като задача за движение). Бегач може да пробяга сам писта за 4 ч, а друг бегач – за 6 ч. Да се намери на каква част от дължината на пистата ще отстоят двамата бегачи, ако са стартирали от двата ѝ различни края и са бягали 1 час един срещу друг.

Нека единият е пробягал частта AC от пистата (Фиг. $3'$), а другия – BD. Търси се каква част от цялата писта е участъкът CD. Задачата е очевидно изоморфна на тази в Пример 3.



Фиг. 3′. Графично представяне на задача 3′

В задачите за **смеси, сплави и разтвори** се ползва формулата: $P = V\rho$, където P е теглото, V – обема и ρ – плътността. Външната прилика с $S = Vt$ при задачите за движение е очевидна.

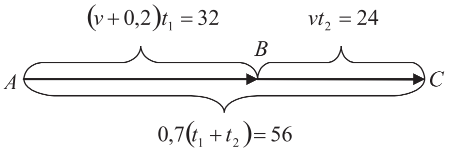
Пример 4. Специфичното тегло на една течност е с 0,2 g/cm^3 по-голямо от специфичното тегло на друга течност. Като се смеси 32 g от първата течност с 24 g от втората, се получава механична смес със специфично тегло 0,7 g/cm^3. Да се намери специфичното тегло на всяка от двете течности (зад. 104.8, стр. 73. в [3]).

Ако с ρ означим специфичното тегло на втората течност, това на първата ще е $\rho + 0{,}2$. Сбора от обемите на първите две течности е обема на получената смес, откъдето $\dfrac{32}{\rho + 0{,}2} + \dfrac{24}{\rho} = \dfrac{56}{0{,}7}$. Това уравнение се преобразува до $50\rho^2 - 25\rho - 3 = 0$, чийто единствен положителен корен е 0,6. т.е. търсените специфични тегла са 0,8 и 0,6.

Пример 4′ (задачата, преформулирана като задача за движение). Бегач е с 0,2 м/с по-бърз от втори бегач. Първият пробягал 32 м и предал щафета на втория, който бягал 24 м оттам до финала. Трети бегач пробягал цялата писта със скорост 0,7 м/с за време – сумата от времената на първите двама. Намерете скоростите на първите двама бегачи.

На теглата на течностите са съпоставени изминати разстояния. Това съответствие е продиктувано от аналогията в "ролята", която тези величини изпълняват в съответните формули – а именно – произведения от другите две. На специфичното тегло е съпоставена скоростта поради сходство в мерните единици (изразяват отношение, частно от мерни единици), макар и това да не е съществено, както ще се уверим в последствие. На обема остава да се съпостави времето, колкото и странно да изглежда. С v м/с е означена скоростта на втория бегач, а скоростта на първия е $v + 0{,}2$ м/с. Времето на първия е $\dfrac{32}{v + 0{,}2}$, на втория – $\dfrac{24}{v}$, а на третия – $\dfrac{56}{0{,}7}$. По условие времето на третия е сума от времената на другите двама: $\dfrac{32}{v + 0{,}2} + \dfrac{24}{v} = \dfrac{56}{0{,}7}$ (сравни с математическия модел на Пример 4). Скоростите на първите двама са 0,8 м/с и 0,6 м/с съответно. Числено тези данни са същите като специфичните тегла на първите две течности в Пример 4.

На фиг. 4′ е изобразена друга идея за решаване: v м/с е скоростта на втория бегач, а времената на първия и втория са съответно t_1 и t_2. Съставяме три линейно независими уравнения с три неизвестни: $(v + 0{,}2)\,t_1 = 32$, $vt_2 = 24$ и $0{,}7\,(t_1 + t_2) = 56$. От системата намираме: $t_1 = 40$, $t_2 = 40$ и $v = 0{,}6$. Какво е тълкуванието на



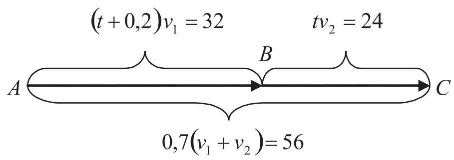
Фиг. $4'$. Още едно решение на Пример $4'$

тези уравнения в задачата за разтвори? t_1 и t_2, заменени с V_1 и V_2, са обемите на първоначалните две течности, а специфичните им тегла са съответно $\rho + 0{,}2$ и ρ. Получаваме аналогична система уравнения с три неизвестни: $(\rho + 0{,}2)\,V_1 = 32$, $\rho V_2 = 24$ и $0{,}7\,(V_1 + V_2) = 56$ с решение $\rho = 0{,}6$, $V_1 = V_2 = 40$.

При този подход учениците ще видят *неочакван* общ подход, правила, закономерности и разсъждения в различни задачи, което е *впечатляващо.* След въвеждането на този метод е желателно да се решат по него достатъчно количество текстови задачи, за да стане той естествен за учениците. Добре е заинтересуваните учители да обмислят методиката на такъв урок внимателно и в детайли, както да са готови да проявяват и гъвкавост в час.

Принцип за дуалност: формулите $P = V\rho$ и $S = Vt$ при съответните задачи са симетрични по отношение на V и ρ в единия случай, и по отношение на V и t – в другия. В следващия пример е показано как може при размяна на ролите на тези величини да се образуват нови задачи със *същите* математически модели, данни и крайни отговори. Това е подобно на принципа за дуалност в геометрията и линейното оптимиране. Дуалните задачи са изоморфни на преките. Такава пропедевтика навярно ще се окаже полезна за бъдещи студенти по математически дисциплини.

Пример $4''$ (дуална задача на $4'$). Джет изминава 32 метра за време, с 0,2 секунди повече от времето, за което друг джет изминава 24 метра. Самолет изминава сумарното разстояние за 0,7 секунди със скорост – сумата от скоростите на двата джета. Намерете времената, за които джетовете изминават разстоянията от 32 и 24 метра съответно.



Фиг. $4''$. Графично представяне на Пример $4''$

На Фиг. $4''$ с t е означено времето в секунди на втория джет, а това на първия, съгласно условието, е $t + 0,2$. Скоростите на двата джета са означени с v_1 и v_2 м/с. Уравнението $(t + 0{,}2)\,v_1 = 32$ изразява условието, че първия джет се движи за време $t + 0{,}2$ със скорост v_1 и изминава 32 метра. Аналогично, за втория джет се получава уравнението $tv_2 = 24$, а за самолета: $0{,}7\,(v_1 + v_2) = 56$, т.к. той изминава сумата от разстоянията на джетовете, т.е. 56 м за 0,7 с със скорост – сумата $v_1 + v_2$ от скоростите на джетовете. *Условно* може да приемем, че единия джет изминава 32 м от точка A до точка B на чертежа, а втория – 24 м от B до C. Тогава от A до C са тези 56 м, които самолета изминава. Този любопитен факт се дължи на *още един изоморфизъм*: задачата за хаотично движещи се джетове и самолет е изоморфна на тази с движещи се по упоменатите трасета от лъча AC. Тук $v_1 = v_2 = 40$ м/с, а $t = 0,6$ с. Търсените времена са съответно 0,8 и 0,6 с. **Втори начин:** скоростта на първия джет е $\dfrac{32}{t+0{,}2}$, на втория – $\dfrac{24}{t}$, а на самолета – $\dfrac{56}{0,7}$ (и в трите случая тя се пресмята по формулата път върху време). По условие скоростта на самолета е сума от тези на джетовете, т.е. $\dfrac{32}{t+0{,}2} + \dfrac{24}{t} = \dfrac{56}{0{,}7}$. Сравнете резултата, математическите модели и решенията с тези в Пример 4 и Пример $4'$.

При съставяне на дуалната задача се наложи да се съобразява какъв вид обекти биха могли да имат скорости на движение числата, които се получават. Затова бегачите са заменени с джетове и самолет. Ако обектите се налага да бъдат по-бавни, те може да бъдат костенурки и мравки, за да не се получат смешни коментари от страна на ученици за нереалистична задача.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Величков, Р. Русев. Сборник по математика за 5-ти – 6-ти клас, СД Недкова&Математика, София 1997.

[2] З. Паскалева, Д. Кръстев, М. Алашка. Математика. Книга за ученика за 7-ми клас, Архимед, София 2001.

[3] К. Тороманов. Практическо ръководство за решаване на текстови задачи по математика за 7-ми и 8-ми клас.

Асен Велчев
Университет за национално и световно стопанство
Студентски град
1700 София
e-mail: asen_v@abv.bg

ABOUT ONE APPROACH TO THE WORD PROBLEMS AT SCHOOL

Asen P. Velchev

It is presented an idea for some elective mathematics course for 10th – 12th graders, mathematics profile. The goals of this approach are stimulation of the understanding, increment of students' interest in mathematics activities and more creativity at the one hand, and propaedeutics of the concepts isomorphism and duality principle at the other.