

ВЕРОЯТНОСТНО МОДЕЛИРАНЕ НА РАСТЕЖА НА ПУКНАТИНИ В ШАРНИРНИ БОЛТОВЕ С ПОМОЩТА НА МОНТЕ КАРЛО СИМУЛАЦИИ В MATLAB

Райчо РАЙЧЕВ Иванка ДЕЛОВА
rpraichev@tu-plovdiv.bg ivankadelova@tu-plovdiv.bg

Катедра „Механика“, ТУ София - филиал Пловдив, 4000, БЪЛГАРИЯ

В настоящата работа е представен подход за вероятностно моделиране на растежа на пукнатини в шарнирни болтове чрез метода на Монте Карло, реализиран в програмната среда MATLAB. Използвана е класическата зависимост на „Парис–Ердоган“ за скоростта на растеж на пукнатината, като материалните константи (C и m), натоварването и началната дълбочина на пукнатината са разглеждани като случайни величини с предварително зададени статистически разпределения. Проведени са симулации за определяне на вероятностното разпределение на остатъчния живот и критичната дълбочина на пукнатината при различни термообработки на стомана 42CrMo4. Получените резултати показват значително влияние на дисперсията на входните параметри върху очаквания живот и вероятността от отказ на шарнирния болт. Разработеният MATLAB модел може да бъде използван като инструмент за прогнозиране на надеждността и риска от повреда при реални експлоатационни условия.

Ключови думи: шарнирен болт, пукнатина, Монте Карло симулации, умора, вероятностен анализ, MATLAB, 42CrMo4.

1. Увод

Шарнирните болтове са ключови елементи в редица машиностроителни и транспортни системи, където са подложени на променливи натоварвания, вибрации и агресивни среди. В процеса на експлоатация те често се явяват най-слабото звено на възела, поради концентрации на напрежения и възможност за развитие на умора и пукнатини. Познаването на закономерностите на растежа на пукнатини и прогнозата за остатъчния живот е от съществено значение за повишаване на надеждността и безопасността на конструкциите.

Класическите подходи за анализ на умората се базират на закона на „Парис–Ердоган“ [Paris et al. 1963], който определя скоростта на растеж на пукнатината като функция на диапазона на коефициента на интензивност на напреженията. Макар и широко използван, този подход е детерминистичен и не отчита естествената вариация на реалните експлоатационни фактори – разсейването в механичните свойства, неточности в началната дълбочина на пукнатината, флуктуации в напрежението и геометрични отклонения. В резултат, предсказаният живот често се различава съществено от реалния, особено при елементи,

работещи в циклично натоварени възли като шарнирните съединения.

Основите на съвременната механика на разрушение са положени именно чрез работата на „Парис–Ердоган“, а впоследствие са развити и обобщени в трудовете на [Anderson 2017], [Schijve 2009] и [Suresh 1998], които подробно анализират процесите на инициране и растеж на уморени пукнатини. Тези автори подчертават, че реалният растеж на пукнатини е повлиян от микроструктурни дефекти, остатъчни напрежения и променлив характер на натоварването, което води до статистическо разсейване на резултатите и изисква стохастичен подход при оценката на дълготрайността.

За преодоляване на ограниченията на детерминистичните модели все по-широко приложение намират вероятностните методи, при които параметрите на умората се разглеждат като случайни величини. Един от най-гъвкавите и утвърдени подходи в тази област е методът на Монте Карло, позволяващ да се оцени статистическото разпределение на остатъчния живот и вероятността от отказ чрез генериране на голям брой симулации с различни комбинации на входни параметри.

Значим принос в развитието на този подход има изследването на [Cox et. al 1988], в което чрез

Монте Карло симулации се анализира растежът на малки уморени пукнатини при циклично натоварване. Авторът показва, че дори минимални промени в началните параметри водят до значителна дисперсия на резултатите и различен остатъчен живот, като подчертава, че вероятностният подход осигурява по-точна оценка на надеждността на структурните елементи.

По-късни изследвания, като тези на [Giannella 2022], разширяват приложението на Монте Карло симулациите чрез съчетаване с експериментални данни. Giannella демонстрира, че методът успешно възпроизвежда както средната скорост на растеж на пукнатината, така и наблюдаваното статистическо разсейване, като доказва стохастичния характер на процеса на уморно напукване. Подобни резултати се отчитат и от [Romlay et. al], които прилагат стохастичен модел за растеж на пукнатина в прътова конструкция и установяват добра корелация между симулационни и експериментални данни.

Изследванията на [Shimokawa et. al 1996] допринасят за развитието на фрактографски анализ, като използват метода на Монте Карло за определяне на разпределението на живота при умора въз основа на експериментални наблюдения. Авторът показва, че стохастичният подход позволява по-точно прогнозиране на реалния живот и надеждност на материала. Поновите трудове на [Giannella 2022] надграждат този подход чрез количествена оценка на неопределеността в растежа на пукнатини и показват, че дори малки вариации във входните параметри могат значително да променят прогнозирания живот на конструкцията.

Въз основа на този научен контекст настоящата работа има за цел да разработи вероятностен модел на растежа на пукнатини в шарнирни болтове, реализиран изцяло в MATLAB с използване на метода на Монте Карло. Анализира се влиянието на разсейването на входните параметри – материалните константи на закона на „Парис–Ердоган“, амплитудата на напрежението и началната дълбочина на пукнатината – върху очаквания живот и вероятността от отказ на болта. Получените резултати целят да подпомогнат оценката на надеждността на болтовите съединения и да послужат като основа за оптимизация на конструктивните и експлоатационните параметри.

2. Числен модел и подход на изследването.

Настоящото изследване има за цел да разработи вероятностен модел за растежа на пукнатини в шарнирни болтове чрез метода на

Монте Карло, реализиран в програмната среда MATLAB. Подходът съчетава класическата детерминистична зависимост на „Парис–Ердоган“ с вероятностно описание на основните параметри, което позволява да се оцени статистическото разпределение на остатъчния живот и вероятността от отказ при различни експлоатационни условия.

Моделът на растеж на уморена пукнатина се основава на класическото уравнение на „Парис–Ердоган“:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m, \quad (1)$$

където:

a - текуща дълбочина на пукнатината;

N - броят на натоварващите цикли;

ΔK диапазонът на коефициента на интензивност на напреженията, определен като $\Delta K = Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$. Геометричният фактор Y отчита формата и положението на пукнатината в натоварената зона, а $\Delta \sigma$ представлява амплитудата на номиналното напрежение.

C , m – материални константи (зависят от термичната обработка);

Животът до достигане на критична дълбочина a_c се определя чрез интегриране на уравнението между началната и крайната дълбочина, което в детерминистичен вид може да се представи като:

$$N_f = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C [Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a}]^m}, \quad (2)$$

За да се отчете реалното разнообразие на материалните и натоварващите фактори, параметрите C , m , $\Delta \sigma$ и a_0 се третират като случайни величини с предварително зададени статистически разпределения, определени въз основа на експериментални данни за стомана 42CrMo4. В настоящата работа тези параметри се приемат за нормално разпределени със зададени средни стойности и стандартни отклонения, които отразяват влиянието на технологични и експлоатационни фактори.

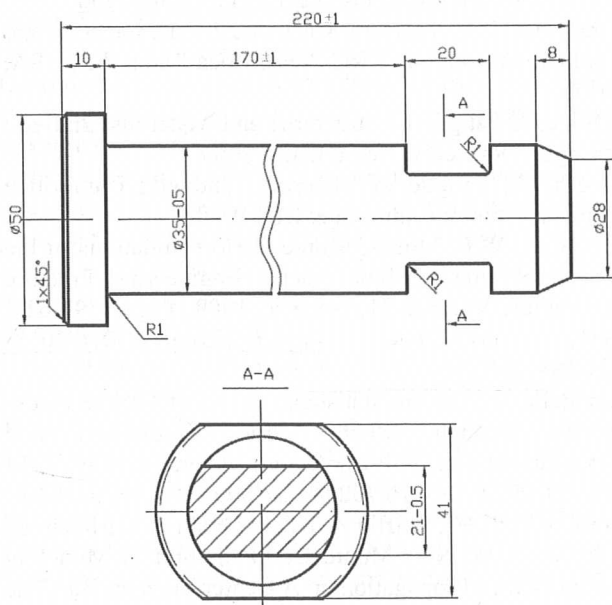
Методът на Монте Карло се използва за многократно генериране на случайни комбинации на входните параметри и за интегриране на уравнението на „Парис–Ердоган“ за всяка от тях до достигане на критичната дълбочина на пукнатината. По този начин се получава множество от възможни стойности на живота до отказ N_f , отразяващи вероятностния характер на процеса. Проведените симулации са реализирани чрез собствен MATLAB код, като за всяко изчисление се генерират случайни стойности на C , m , $\Delta \sigma$ и a_0 по зададените разпределения, а интегрирането се извършва числено до достигане на a_c . След завършване на

всички симулации, получените резултати се обработват статистически, като се определят средната стойност на жизнения цикъл $\tilde{N}_f$, стандартното отклонение, вероятността от отказ $P_f(N)$ и доверителните интервали.

Изследването е проведено за шарнирен болт от стомана 42CrMo4 при различни режими на термообработка – без термообработка, закаляване в масло, закаляване във вода и цементация с последващо закаляване. За всеки от режимите са използвани съответните материални константи C и m , определени в предходни експериментални изследвания. Началната дълбочина на пукнатината a_0 е избрана в диапазона 0.3–0.5 mm, което съответства на реални експлоатационни дефекти, а критичната дълбочина a_c е определена от условията за достигане на максимално допустимо напрежение в напречното сечение на болта. Получените статистически зависимости между вероятността от отказ и броя на натоварващите цикли позволяват оценка на надеждността на шарнирните съединения и дават основа за сравнение на ефекта от различните термични обработки върху пукнатиноустойчивостта на материала.

3. Резултати и дискусия.

На фигура 1 е представен чертеж на изследвания шарнирен болт.



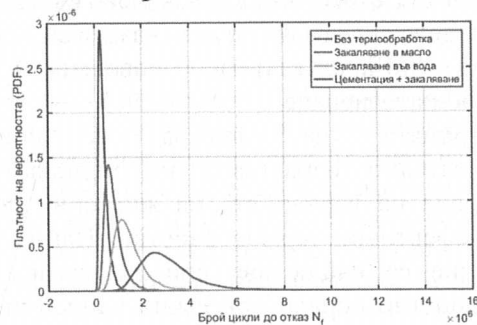
Фиг. 1 Чертеж на изследвания образец.

След реализиране на разработения числен модел в средата MATLAB са проведени серия от Монте Карло симулации за определяне на вероятностното поведение на растежа на пукнатини в шарнирни болтове от стомана 42CrMo4. Основната цел на анализа е да се оцени

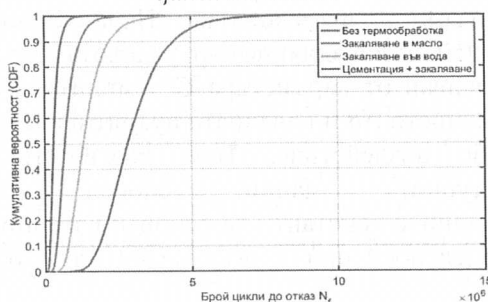
влиянието на разсейването на входните параметри – материалните константи на закона на „Парис–Ердоган“, амплитудата на напрежението и началната дълбочина на пукнатината – върху остатъчния живот и вероятността от отказ на болта.

Резултатите от симулациите представят статистическо разпределение на живота до отказ N_f , което позволява да се изследват не само средните стойности, но и диапазонът на вариациите, характерен за реалните експлоатационни условия. За всеки от разглежданите режими на термообработка (без термообработка, закаляване в масло, закаляване във вода и цементация с последващо закаляване) са извършени 10 000 симулации, от които е получен спектър от възможни сценарии на растеж на пукнатината. Получените данни са анализирани под формата на хистограми, вероятностни плътности (PDF), кумулативни функции (CDF) и доверителни интервали за средния живот.

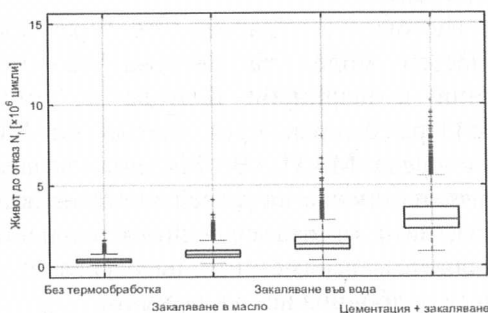
На фигури 2, 3, 4 и 5 са представени резултатите от проведените симулации.



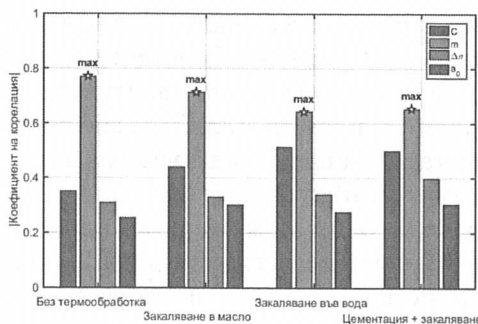
Фиг. 2 Разпределение на вероятността за жизнения цикъл до отказ.



Фиг. 3 Кумулативно разпределение на N_f .



Фиг. 4 Статистическо разпределение по термообработки.



Фиг. 5 Чувствителност към входните параметри.

От кривите на плътността на вероятността (PDF) се вижда, че при състояние без термообработка животът е най-кратък – до около 1×10^6 цикъла, докато при закаляване и особено при цементация и закаляване животът нараства до над 5×10^6 цикъла. Това се дължи на повишената твърдост и устойчивост на растеж на пукнатини в резултат на термичната обработка.

Кумулативните функции (CDF) потвърждават тези тенденции – вероятността за отказ при образци след цементация и закаляване достига 90% едва след значително по-голям брой цикли в сравнение със стоманата в незакалено състояние. Разсейването на резултатите намалява, което означава по-предсказуемо поведение при циклично натоварване.

Диаграмата на фигура 4 показва последователно нарастване на медианата и редуциране на вариацията на жизнения цикъл при по-ефективни термообработки. Най-голямо разсейване се наблюдава при закаляване във вода, вероятно поради остатъчни напрежения и неравномерна структура.

Анализът на чувствителността показва, че параметърът m от закона на „Парис–Ердоган“ оказва най-силно влияние върху живота ($|r| \approx 0.7-0.8$), следван от параметъра C . Амплитудата на напрежението $\Delta\sigma$ и началната пукнатина a_0 имат по-слабо въздействие. Това съответства на литературните данни, според които материалните константи са основен източник на неопределеност при прогнозиране на уморния живот.

4. Заключение.

В настоящата работа е разработен вероятностен модел за растежа на уморни пукнатини в шарнирни болтове от стомана 42CrMo4, реализиран чрез метода на Монте Карло в среда MATLAB. Моделът позволява количествена оценка на разсейването на живота до отказ, като отчита случайните вариации в материалните параметри, натоварването и началната дълбочина на пукнатината.

Получените резултати показват, че термообработката оказва съществено влияние

върху надеждността и дълготрайността на болтовете. Най-нисък живот се наблюдава при стоманата в сурово състояние, докато цементацията и закаляването водят до значително повишаване на устойчивостта на растеж на пукнатини и до удължаване на живота над пет пъти. Анализът на чувствителността доказва, че експонентът m от закона на „Парис–Ердоган“ има доминиращо влияние върху резултатите, което подчертава необходимостта от неговото точно експериментално определяне.

Разработеният стохастичен подход осигурява по-реалистично описание на процесите на умора и може да бъде използван като инструмент за прогнозиране на остатъчния живот и за оценка на вероятността от отказ при циклично натоварване възли. Получените зависимости създават основа за оптимизация на термообработките и конструктивните параметри на шарнирните съединения с цел повишаване на тяхната експлоатационна надеждност.

Резултатите в настоящото изследване са получени по проект №252ПД0034-24, финансиран от субсидията за научни изследвания в Технически университет – София.

ЛИТЕРАТУРА

- Paris, P.; Erdogan, F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering* 1963, 85(4), 528–534, <https://doi.org/10.1115/1.3656900>
- Anderson, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, 4th ed.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2017.
- Schijve, J. *Fatigue of Structures and Materials*, 2nd ed.; Springer, Dordrecht, Netherlands, 2009.
- Suresh, S., *Fatigue of Materials*, 2nd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1998.
- B.N. Cox, W.L. Morris, Monte Carlo simulations of the growth of small fatigue cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 31, Issue 4, 1988, Pages 591-610, ISSN 0013-7944, [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(88\)90102-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(88)90102-6).
- Giannella V., On the statistical nature of fatigue crack-growth through Monte Carlo simulations and experimental data, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 1214 012020, 2022, DOI 10.1088/1757-899X/1214/1/012020
- Romlay F. R. M., Ariffin A. K., Abdullah Nik, Mohamed Nik, M. J. M. Nor, Monte Carlo Method in Modeling Fatigue Crack Propagation on A Center Member Bar, The 5th Regional Seminar on Computational Mechanics and Numerical Analysis, 5 June 2004, Banda Aceh, Indonesia.
- Shimokawa T., Kakuta Y., Application of Monte Carlo simulation for fractographic analysis of fatigue crack propagation, *International Journal of Fatigue*, Volume 18, Issue 5, 1996, Pages 321-327, ISSN 0142-1123, [https://doi.org/10.1016/0142-1123\(96\)00098-9](https://doi.org/10.1016/0142-1123(96)00098-9).
- Giannella V., Uncertainty quantification in fatigue crack-growth predictions. *Int J Fract* 235, 179–195 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10704-022-00624-4>