



FRICION INDUCED VIBRATIONS OF CONTINUOUS SYSTEM

Ivan KRALOV, Ignat IGNATOV, Petko SINAPOV

Abstract: In this work friction induced vibration of continuous systems are studied. The dynamic model is built by FEM, and the damping of the system is considered (Rayleigh damping). The friction forces in the contact faces are modeled as nonlinear functions depending on the relative slipping velocity. Stationary process of the motion is considered. The solution is made by Matlab-Simulink.

Ключови думи: Friction vibrations, continuous systems, FEM.

ФРИКЦИОННИ САМОВЪЗБУЖДАЩИ СЕ ТРЕПТЕНИЯ НА СИСТЕМА С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

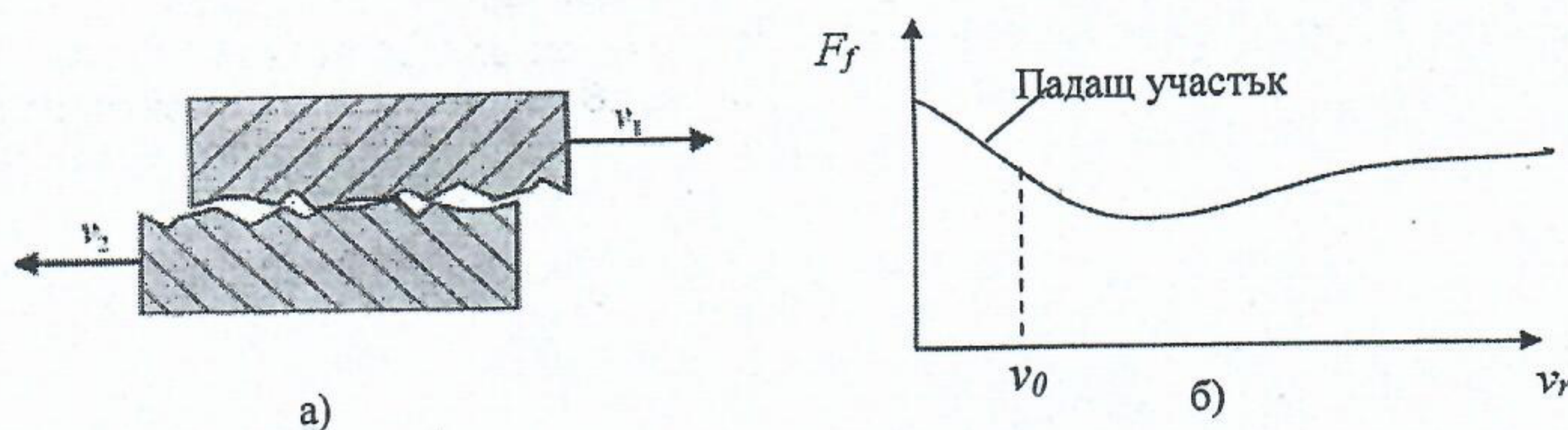
Иван КРАЛОВ, Игнат ИГНАТОВ, Петко СИНАПОВ

Резюме: В работата се изследват фрикционни самовъзбуждащи се надлъжни трептения на тяло с разпределени параметри. Динамичният модел е изграден с помощта на МКЕ, като е отчетено вътрешното демпфиране (Rayleigh damping). Силите на триене, действащи в контактните повърхности, са нелинейни функции, зависещи от релативната скорост на плъзгане. Изследван е стационарен процес на движение. Решението е извършено с Matlab в среда Simulink.

Ключови думи: Фрикционни трептения, системи с разпределени параметри, МКЕ.

1. УВОД

Самовъзбуждащите се фрикционни трептения е феномен, който често се среща в природата. Като примери могат да се посочат свиренето на колело и релса на ЖПС в крива [10,11], свиренето на дискови спирачки [5], свиренето на режещите инструменти на металорежещи машини, свиренето на цигулка, трептения от приплъзване на съединител на транспортно средство и др. Причината за възникването на тези трептения е зависимостта силата на триене при плъзгане от релативната скорост ($v_r = v_1 - v_2$) между триещите се повърхнини (фиг. 1(а)). Явлението се проявява в случаите, когато силата на триене има падащ участък.



Фиг.1

В голям брой изследвания, посветени на фрикционни трептения, се изследват само дискретни системи [1, 2, 3, 6, 12, 13, 14 и др.]. В част от механичните системи опростяването на динамичните модели при изследване на фрикционни самовъзбуждащи се трептения не е удачно, защото това би довело до изчезване на някои собствени честоти, а те са основен фактор при такова изследване [12]. В това число попадат системите с разпределени параметри

[7]. Такъв е случаят при плъзгане между колело и релса на подвижен железопътен състав (ПЖПС) (фиг. 2).



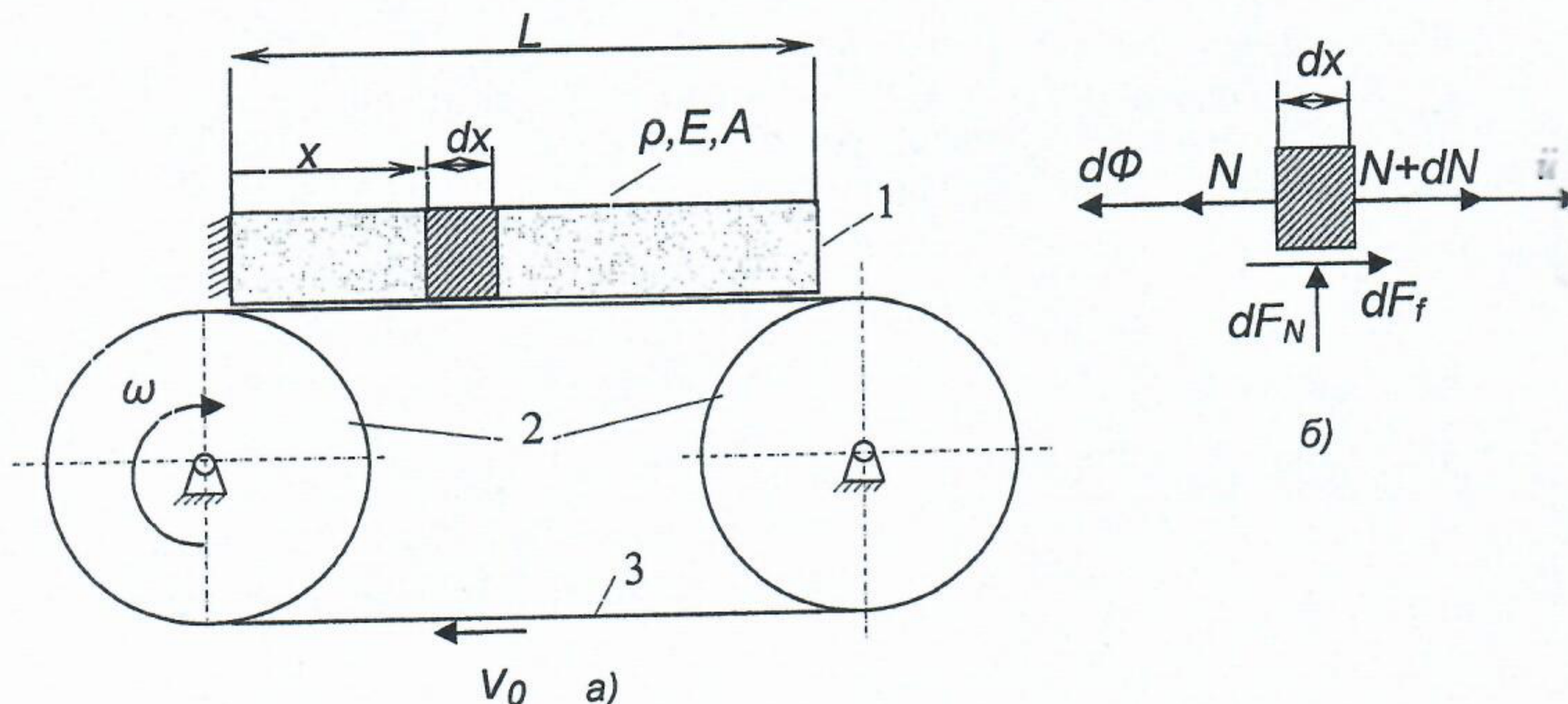
Фиг. 2

Целта на настоящата работа е да се изследват фрикционните надлъжни трептения на еластично тяло (система с разпределени параметри), с отчитане на линейното съпротивление в него.

2. ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ

Динамичният модел е показан на фиг. 3(а). Той се състои от барабани 2 с еднакви радиуси, които се въртят с постоянна ъглова скорост ω и са свързани посредством нееластична лента 3, която се движи с постоянна скорост v_0 . На лентата лежи тяло 1 с маса m , което се разглежда като система с разпределени параметри, която е хомогенна, изотропна и се деформира еластично (важи законът на Хук) [1]. Приема се, че при надлъжните деформации, напречните сечения остават равнинни и се движат транслационно по оста x на тялото [1]. Преместването на сечение от тялото 1, намиращо се на произволно разстояние x , се описва с функцията $u(x,t)$ [1]. На фиг. 3 (б) са показани силите, действащи в краен елемент от тялото с дължина dx .

Абсолютната деформация на елемента е $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$. С $dF_N = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ е означена елементарната нормална сила, която се приема за постоянна. $d\Phi = A\rho\ddot{u}dx$ е елементарната инерционна сила. Между тялото 1 и лентата 3 се отчита сухото триене. dF_f е елементарната сила на триене, действаща между елемента и лентата. Елементарната сила на триене зависи от големината на относителната скорост $v_r(x,t) = v_0 - \dot{u}(x,t)$, при което характеристиката на силата на триене има вида показан на фиг. 1(б). Силите на триене и нормалният натиск се приемат за равномерно разпределени по триещите се повърхнини.



Фиг 3.

Използвани означения:
 L – дължина на тялото;
 E – модул на еластичност;
 A – напречно сечение на тялото;

ω - ъглова скорост на ролките;

$v_0 = \omega r$ - скорост на лентата.

Движението на тялото се описва с частно диференциално уравнение от втори ред [1]:

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{dF_f}{A\rho} = 0. \quad (1)$$

Елементарната сила на триене е зависима от скоростта на плъзгане (фиг.16). В падащия участък тя се представя с кубична функция [1,3, 4, 6]:

$$dF_f = (b_0 - b_1 v_r(x,t) + b_2 v_r^2(x,t) + b_3 v_r^3(x,t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \quad (2)$$

където b_0, b_1, b_2, b_3 са положителни константи. За намаляване на изчислителната работа се приема, че няма зацепване между тялото и лентата, т.е. $v_0 > \dot{u}(x,t)$.

Граничното условие за точката на закрепване на тялото е

$$u(0,t) = 0. \quad (3)$$

Начални условия са

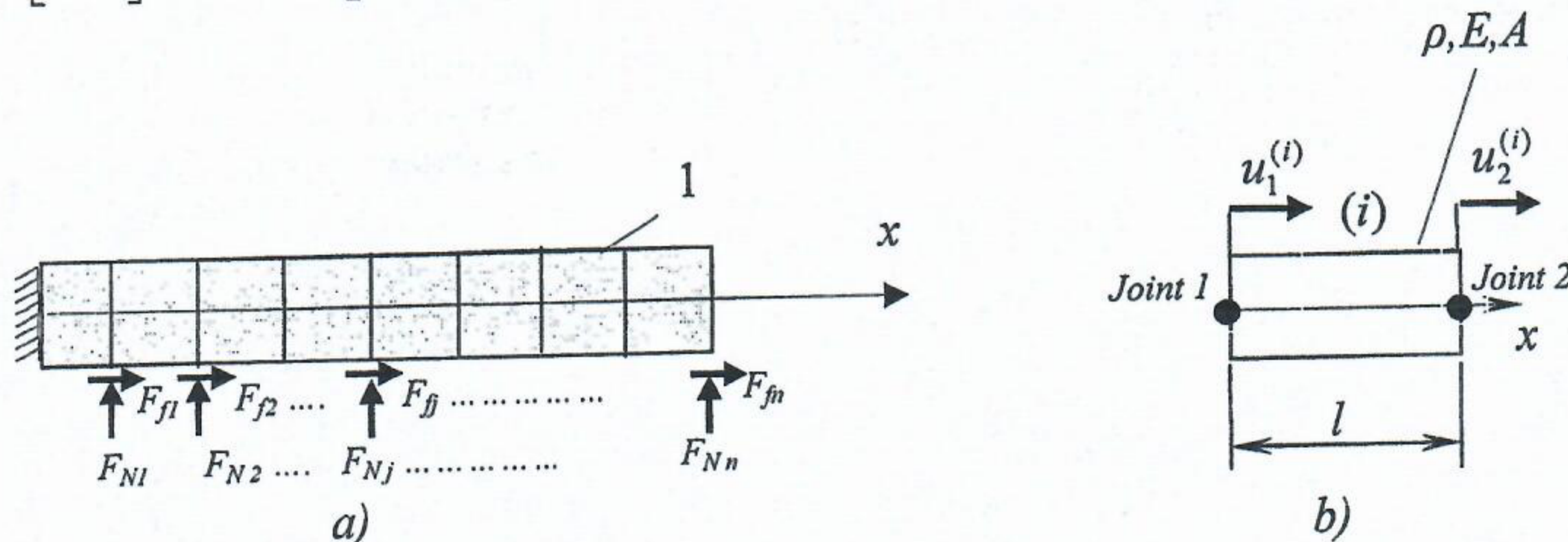
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

3. МОДЕЛИРАНЕ С МКЕ

За решението на уравнения (1), (2), (3) и (4) се използва МКЕ, като тялото се разделя на n на брой крайни елементи. Елементът i е показан на фиг. 4 [8, 9]. Във всеки възел той има по една степен на свобода, т.е. движението му се описва с две степени на свобода.

Матриците на масата и еластичността за показания краен елемент (фиг. 4) са:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad K^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$



Фиг. 4.

При формирането на глобалните матрици е по-удобно да се работи и с глобални координати. При прехода към такива трябва да се имат предвид следните връзки между степените на свобода на крайните елементи и глобалните степени на свобода:

$$u_1^{(1)} = u_1, u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2, \dots, u_2^{(i-1)} = u_1^{(i)} = u_i, \dots, u_2^{(n)} = u_{n+1}, \quad (6)$$

където с u_i ($i=1, \dots, n+1$) са означени глобалните степени на свобода. По този начин уравнения (1) се представят като система от $n+1$ обикновени диференциални уравнения от втори ред, от които трябва да се извади едно гранично условие (уравнение 3). Така диференциалното уравнение добива вида

$$[M^*]\{\ddot{u}\} + [C^*]\{\dot{u}\} + [K^*]\{u\} = \{F^*\}, \quad (7)$$

където с $[M^*]_{n \times n}$ и $[K^*]_{n \times n}$ са означени съответно матриците на масите и еластичностите с размерност $(n) \times (n)$;

$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ - вектор на ъгловите координати;

$[C^*] = \alpha[M^*] + \beta[K^*]$ - матрицата на демпфиране на Rayleigh [9], коефициентите α и β подлежат на определяне за съответната конструкция;

$\{F^*\}_{n \times 1} = [F_{f1}, F_{f2}, \dots, F_{fn}]^T$ - разпределение на силата на триене с размерност $(n) \times 1$.

Силите на триене се приемат, че са разпределени по възлите и пресмятат се по

$$F_{fj} = b_0 - b_1 v_{rj} + b_2 v_{rj}^2 + b_3 v_{rj}^3, \quad j=1 \dots n \quad (8)$$

където $v_{rj} = v_0 - \dot{u}_j$ са релативните скорости на всеки един възел.

4. ЧИСЛЕНО РЕШЕНИЕ

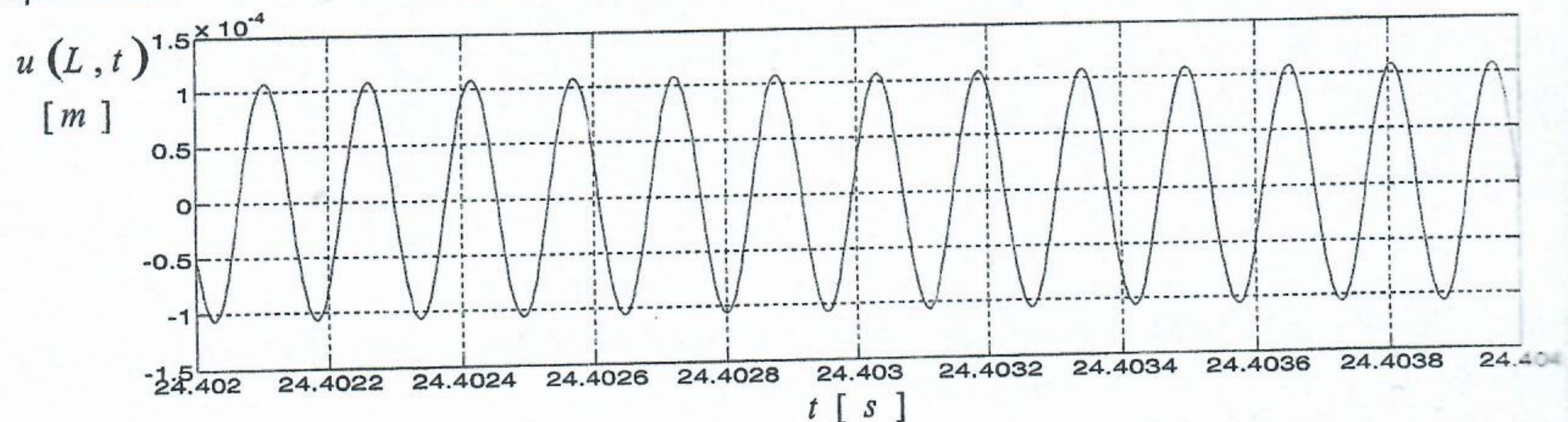
Използват се следните параметри за численото решение: $L = 0,2 \text{ m}$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$,
 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$, $A = 10^{-4} \text{ m}^2$, $b_0 = 4,5 \text{ N}$, $b_1 = 0,63 \text{ Ns/m}$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0,0021 \text{ Ns}^3/\text{m}^3$,
 $\alpha = 0$, $\beta = 1,49 \cdot 10^{-7} \text{ s/rad}$.

Собствените честоти на системата са пресметнати с *Matlab* чрез решение на хомогенната част на уравнение (7) и без отчитане на вътрешното демпфиране. В табл. 1 са дадени само първите четири стойности.

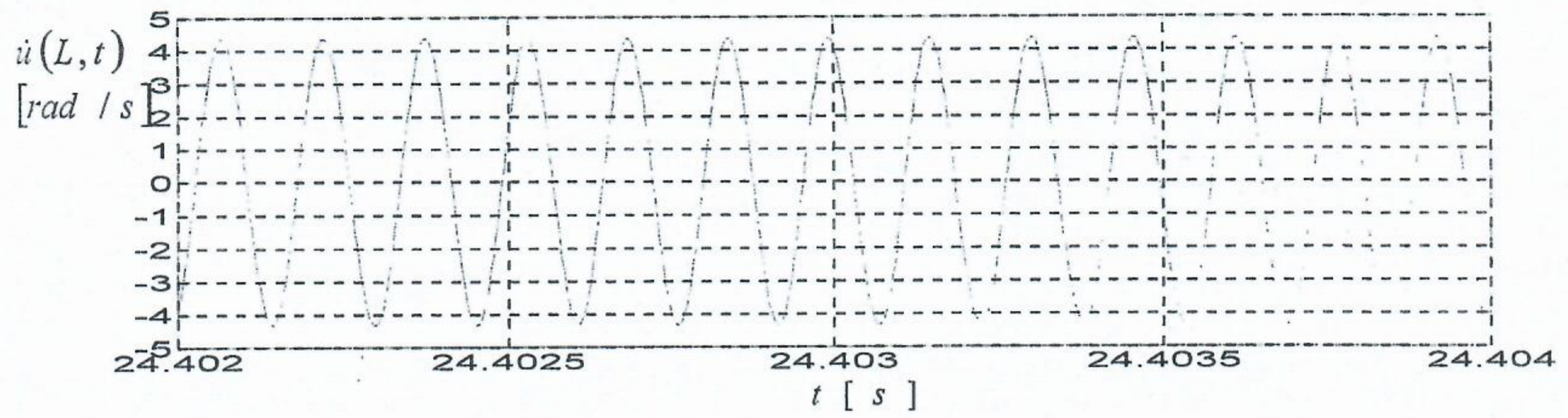
Таблица 1.

Собствени честоти	Hz
f_1	6470
f_2	19550
f_3	33030
f_4	47180

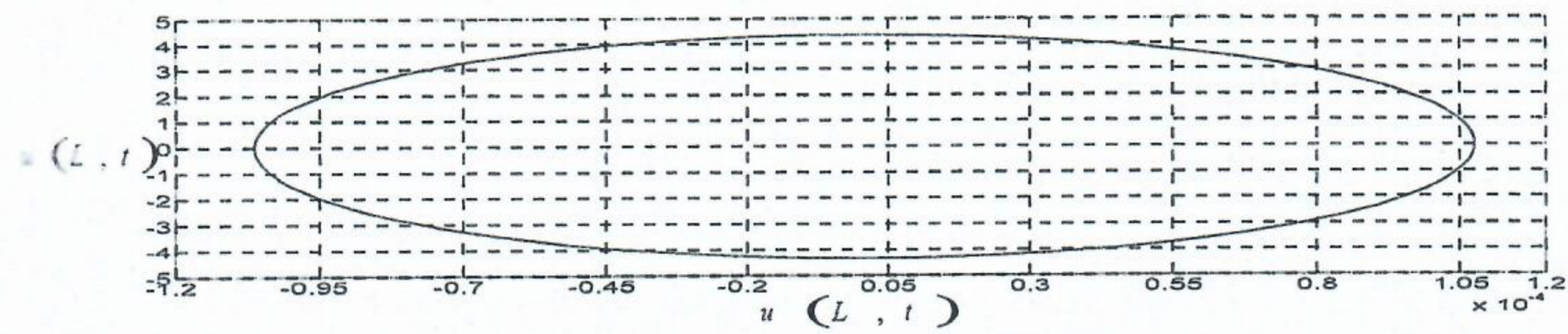
Уравнения (7) се решават с помощта на *Matlab-Simulink*, като резултатите са показани графично на фиг.5-9. На фиг. 5 е представено законът за движение $u(L, t)$ на сечение при $x=L$. На фиг. 6 е показан законът за изменение на скоростта $\dot{u}(L, t)$ за същото сечение. На фиг. 7 е показана фазовата крива, т.е. граничният цикъл по който се установяват трептенията. На фиг. 8 е представен законът за движение $u(0,072, t)$ на сечение при $x=0,072 \text{ m}$, а на фиг. 9. показан граничният цикъл за същото сечение. От фигурите може да се отчете, че трептенията са с първа собствена честота на системата.



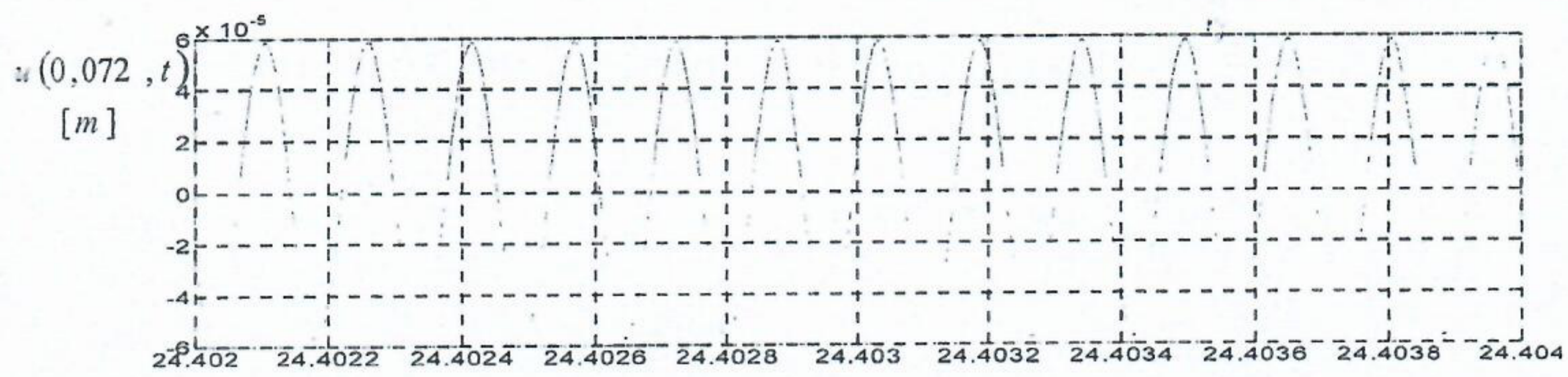
Фиг 5.



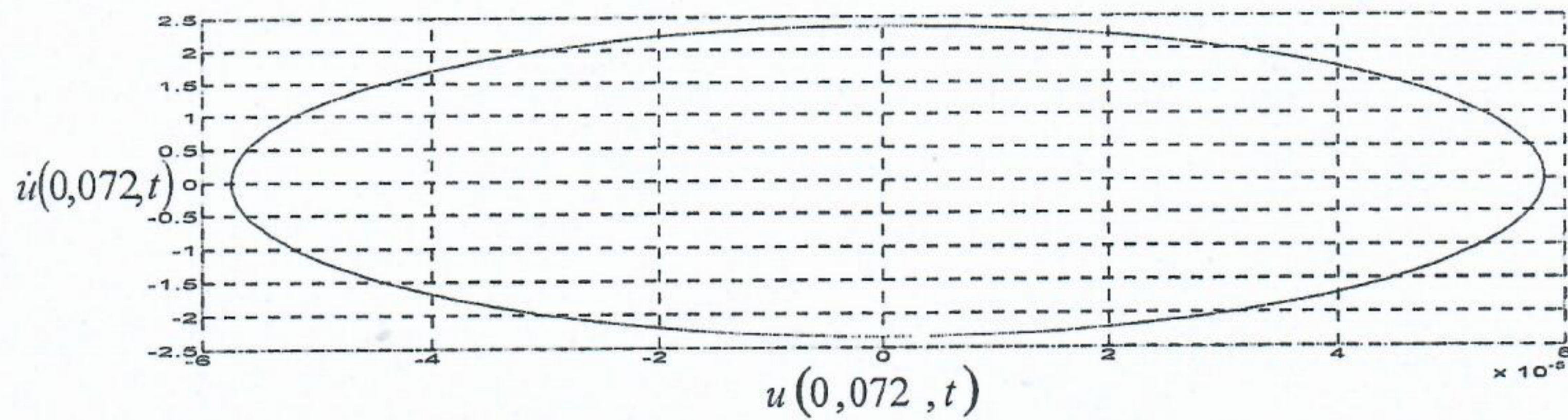
Фиг 6.



Фиг 7.



Фиг 8.



Фиг 9.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работата са изследвани фрикционни самовъзбуждащи се трептения на тяло с разпределени параметри. Задачата е решена числено, чрез моделиране с помощта на МКЕ и с отчитане на вътрешното съпротивление. Определени са собствените честоти на системата, които са основен фактор при изследване на фрикционни самовъзбуждащи се трептения. От численото решение се установи, че за изследваната система, фрикционните самовъзбуждащи се трептения са с честота, приблизително равна на първата собствена честота на системата.

Необходимо е да се отбележи, че подобни системи могат да трептят с някоя от другите или всички собствени честоти едновременно, което зависи от конструктивните им особености [12]. Това налага индивидуално изследване за всяка система.

БЛАГОДАРНОСТИ

Научните изследвания, които са представени в настоящата публикация са финансирани от ФОНД НАУЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ по договор ДМУ 03/8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belnikolovsky, B., Particular Chapters in Mechanics, Sofia, Technical University of Sofia, 2008, (in Bulgarian).
2. Casini, P., F. Vestroni, Non-Smooth Dynamics of a Double-Belt Friction Oscillator, IUTAM Symposium, 08-13 June 2003, Rome, Italy.
3. Duntchev G., Selbsterregte Schwingungen eines Systems mit mehreren Reibflächen, TECHNISCHE MECHANIK, Band 25, 2004
4. Dunchew, G., P. Sinapov, Non-stationary Friction Vibrations, Mechanics of Machines, Vol. 76, pp. 17-20, Varna, 2008 (in Bulgarian).
5. Hetzler H., Schwarzer D., Seemann W., Analytical investigation of steady-state stability and Hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise, Elsevier Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12 (2007) 83-99.
6. Kononenko, M., Non-linear vibrations of the mechanical systems, Keiv, 1980, (in Russian).
7. Landa Polina, Self-excited vibrations in continuous systems, ISBN 5937011053, 2009 (in Russian)
8. Rao S. S., The Finite Element Method in Engineering, Elsevier Science & Technology Books, December 2004
9. Reddy, J.N., An Introduction to the FEM, McGraw-Hill Book Company, 1984.
10. Thompson, D.J., Railway Noise and Vibration, Elsevier, 2009.
11. Sheng Gang, FRICTION-INDUCED VIBRATIONS and SOUND, ISBN-13: 978-1-4200-5178-0, 2008 by Taylor & Francis Group, LLC.
12. Tondl A., Self-excited vibrations in mechanical systems, Moskva, Mir, 1979 (in Russian).
13. Tondl, To the Problem of Self-excited Vibration Suppression, Engineering MECHANICS, Vol. 15, 2008, No. 4, pp. 297-307.
14. Tondl, Passive And Active Means For Self-Excited Vibration Suppressing: Two-Mass Model, Engineering Mechanics, Vol. 15, 2008, No. 2, pp. 133-138.

КОРЕСПОНДЕНЦИЯ

Име: Кралов Иван
Институция, Адрес: Технически университет-София, София 1000, бул. "Кл. Охридски" 8
България
e-mail: kralov@tu-sofia.bg