

# АДЕКВАТНОСТ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ МОДЕЛ НА ПРЕДАВАТЕЛНАТА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ИЗМЕРВАТЕЛНО УСТРОЙСТВО

*Румен Йорданов<sup>1)</sup>, Георги Дюкенджиев<sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup> ТУ - София, бул. "Климент Охридски" 8, e-mail: rsi@tu-sofia.bg

<sup>2)</sup> ТУ - София, бул. "Климент Охридски" 8, e-mail: duken@tu-sofia.bg

*Резюме:* Предавателната характеристика на измервателно устройство по същество представлява математически модел, който описва поведението на преобразователната верига и в редица случаи е необходимо да се прави обосновка за това доколко добре моделът описва реалните процеси, протичащи в устройството, т.е. за адекватността на този модел. В работата се разглеждат методи за проверка на адекватност, основани на статистически критерии. Разгледан е и пример, илюстриращ влиянието на обема на експерименталните наблюдения и възможностите за надеждна оценка и при малък брой наблюдения.

*Ключови думи:* измерване, предавателна характеристика, моделиране.

## 1. Въведение

Специално проектираните (техническите) средства за измерване обикновено се наричат измервателни устройства. Те осигуряват изкуствено създадена среда за протичане на необходимите за измерването физични и др. явления. Към измервателните устройства се отнасят както средствата, реализиращи цялата измервателна процедура – измервателни уреди и системи, така и средствата (градивни елементи), реализиращи само отделни, необходими за измерването операции – сензори, измервателни и мащабни преобразователи, сравняващи устройства и др. [1]. В случаите, когато измервателните устройства са градивни елементи, без в тях да бъде въведена и запомнена информация за възприетата метрика (големина на референтен елемент) е от значение познаването на предавателната им характеристика.

Предавателната характеристика на измервателно устройство, по същество представлява математически модел, който описва поведението (функционирането) на преобразователната верига на измервателното устройство и изразява зависимостта между информативните параметри на входния и изходния сигнали. Този математически модел може да се използва за изследване на функционирането на измервателното устройство, за избор на подходящо измервателно устройство като градивен елемент от измервателен уред или система. Предавателните характеристики изразяват само физическото функциониране на преобразователните вериги на измервателните устройства, но не и функциите, с които те са натоварени като носители на измервателна ин-

формация.

Изследването на измервателните устройства чрез математическия модел на предавателната характеристика, може да се прилага както при проектиране на нови устройства, така и при съществуващи. Във втория случай обикновено експериментално се определя връзката между изходния и входния сигнали (предавателната характеристика) и чрез методите на регресионния анализ се предлага математичен модел.

## 2. Адекватност на модела

В много случаи е полезно да се разполага с формално потвърждение или обосновка за адекватността на предложен модел. Проверката за адекватност на модела означава представяне на потвърждение за това доколко добре моделът описва реалните процеси, протичащи в устройството. Проверка за адекватност на модела е необходима, тъй като неадекватен модел може да доведе до вземане на грешни решения. Проверката може да се извърши чрез сравняване на резултатите получени чрез модела с експериментално получени резултати от изследване на реални обекти. Ако в резултат от проверката се получат недопустими (за целите на изследването) разлики между реалния обект и неговия модел, то в модела могат да се внесат необходимите изменения.

Един от най разпространените начини за обосновка на адекватността на модела е използването на методите на математическата статистика. Тези методи се основават на проверката на статистически хипотези на основата на опреде-

лени статистически критерии. При проверката на хипотези с методите на математическата статистика е необходимо да се има предвид, че статистическите критерии не могат да докажат издигнатата хипотеза, а могат само да покажат липсата на опровержение.

Оценката за адекватност, основана на сравнение на експериментални резултати от наблюдение на реален обект с математическия му модел, може да се извърши по различни способы, като най-прилагани са два: сравняване на експериментално получената оценка на математическото очакване на определена съвкупност с изчислените въз основа на модела стойности и чрез сравняване на дисперсиите, характеризиращи разсейването на експерименталните резултати и разсейването на отклоненията на резултатите от модела и експеримента. В първия случай се прави проверка на статистическата хипотеза за равенство (в статистически смисъл) на математическото очакване на зададена стойност, а във втория случай – за равенство на две дисперсии.

Когато оценката за адекватност се прави въз основа на разликите между резултатите от експерименталното наблюдение и стойностите, получени от математическия модел могат да се ползват *U*-критерий (при голям брой наблюдения –  $n > 30$ ) и предварително известна стойност на дисперсията  $\sigma^2$ , характеризираща разсейването) и *t*-критерий (при неизвестна дисперсия и оценката ѝ по резултатите от експериментално наблюдение).

За оценка на адекватността на модела е удобно въвеждането на коефициент на адекватност  $C_A$ , който ако е по-голям от единица моделът може да се счита за адекватен (не може да се опровергае адекватността му).

$$C_A = \frac{z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{|\bar{y}_j - Y_j|_{\max}} > 1 \quad \text{за } U\text{-критерий} \quad (1)$$

и

$$C_A = \frac{t_{\gamma, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}}{|\bar{y}_j - Y_j|_{\max}} > 1 \quad \text{за } t\text{-критерий} \quad (2),$$

където:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum y_j \text{ е средноаритметичната стойност}$$

от  $n$  проведени експеримента при стойност на входната величина  $x_j$ ;

$Y_j$  – стойност, определена чрез модела  $Y=f(x)$  при стойност на входната величина  $x_j$ ;

$\sigma$  – средноквадратично отклонение на изходната величина  $y_j$ ;

$s = STDEV(y_1, y_2, \dots, y_n)$  – оценка на средноквадратичното отклонение  $\sigma$ ;

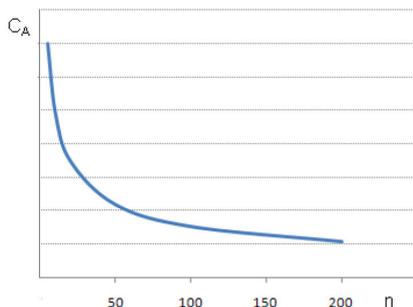
$\alpha$  – ниво на значимост;

$z_{1-\alpha/2} = NORMSINV(1-\alpha/2)$  – квантил на функцията на Гаус;

$t_{\gamma, \alpha/2} = TINV(\gamma, \alpha/2)$  – квантил на функцията на Стюdent;

Въвеждането на  $C_A$  е аналогично на широко прилагания индекс  $C_p$  за оценка на процеси. По същество интервалът  $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$  е доверителният интервал на средните стойности  $\bar{y}_j$ , в който при адекватен модел трябва да попадне стойността  $Y_j$ .

Предимство на метода е възможността за пряко сравняване на отклоненията на  $Y_j$  от  $\bar{y}_j$  с доверителния интервал  $\varepsilon$  и определяне на диапазона на входната величина в който моделът добра описва реалния процес. Недостатък на метода е влиянието на обема на наблюденията върху коефициента  $C_A$ , което е по-голямо при малък брой наблюдения. Характерът на това влияние е показан на фиг.1. Това прави метода приложим при голям брой експериментални наблюдения. При увеличаване на границата на коефициента  $C_A$  на 1,33 (25% намаляване на доверителния интервал  $\varepsilon$ ) може да се повиши достоверността на оценката за адекватност на модела и при малък брой наблюдения.



Фиг.1 Зависимост на  $C_A$  от обема на извадката.

Когато оценката за адекватност се прави въз основа на сравняването на две дисперсии (оценка даваща добри резултати дори при малък обем наблюдения) се ползва критерият на Фишер (*F*-критерий).

Условието моделът да се счита за адекватен е:

$$F = \frac{s_a^2}{s_{cp}^2} < F_{\alpha, k_1, k_2}, \quad (3)$$

където:

$S_{cp}^2 = \frac{1}{m} \sum S_j^2$  – оценка на дисперсията, характеризираща разсейването на експерименталните резултати  $y_j$  от средната стойност  $\bar{y}_j$ ;  
 $S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_j - \bar{y}_j)^2$ ;

$S_a^2 = \frac{n}{m-l} \sum (\bar{y}_j - Y_j)^2$  – оценка на дисперсията, характеризираща разсейването на средните стойности  $\bar{y}_j$  при  $x_j$  от стойностите  $Y_j$ , получени от модела;

$$F_{\alpha, k_1, k_2} = FINV(\alpha, k_1, k_2); \quad (4)$$

$$k_1 = m - l; \quad k_2 = m(n - l).$$

$m$  – бр. на стойностите  $x_j$

$l$  – бр. на членовете (коэффициентите) в уравнението на регресия, ако то е полином [2].

### 3. Пример

Чрез експериментално наблюдение на терморезистори В57861 е определена предавателната характеристика (зависимостта на ел. съпротивление  $r$  от температурата  $T$ ), табл.1.  $\bar{r}$  са средните стойности от извадка с обем  $n=30$ . Средноквадретичното отклонение е известно -  $\sigma=0,16k\Omega$ .

За математическо моделиране на предавателната характеристика е предложен модел 1 от вида [5]:

$$R = R_N \cdot e^{B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}$$

където  $R_N=10k\Omega$  е номиналното съпротивление при температура  $T_N=298K$ ;  $B=3988$ ;  $R$  е съпротивлението при температура  $T$ . В табл.1 са дадени и резултатите получени от този модел.

Таблица 1.

T°C	$\bar{r}$	Модел 1		Модел 2		Модел 3	
		R	$\bar{r} - R$	R	$\bar{r} - R$	R	$\bar{r} - R$
0	32,65	34,842	-2,192	32,67974	-0,02974	32,67974	-0,02974
10	19,9	20,794	-0,894	19,91091	-0,01091	19,91193	-0,01193
20	12,49	12,207	0,283	12,4977	-0,0077	12,50926	-0,01926
30	8,057	8,203	-0,146	8,056123	0,000877	8,092317	-0,03532
40	5,327	5,387	-0,06	5,322223	0,004777	5,389137	-0,06214
50	3,603	3,631	-0,028	3,596257	0,006743	3,690658	-0,08766
60	2,488	2,506	-0,018	2,48056	0,00744	2,594407	-0,10641
70	1,752	1,768	-0,016	1,743493	0,008507	1,867993	-0,11599
80	1,258	1,272	-0,014	1,246772	0,011228	1,374474	-0,11647
90	0,918	0,931	-0,013	0,90586	0,01214	1,031305	-0,11331
100	0,68	0,694	-0,014	0,667922	0,012078	0,787532	-0,10753
110	0,511	0,525	-0,014	0,499255	0,011745	0,610955	-0,09996

Тъй като при  $\alpha=0,05$ :  $C_A=0,026$  то математическият модел 1 не може да се счита за адекватен. Той успешно отразява експерименталните резултати само в интервала на входната величина 50 - 110°C, за който  $C_A=2,04$ .

Ако се използва друг модел (модел 2) от вида [5]:

$$R = l / (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5)$$

където

$$a_0=0,0306; \quad a_1=1,5688 \cdot 10^{-3}; \quad a_2=3,427 \cdot 10^{-5};$$

$$a_3=4,8022 \cdot 10^{-7}; \quad a_4=2,5939 \cdot 10^{-9}; \quad a_5=2,2736 \cdot 10^{-11}$$

$C_A=4,72$  и модел 2 може да се счита за адекватен.

Ако проверката за адекватност се направи чрез сравняване на дисперсиите:

$$S_{cp}^2 = \sigma^2 = 0,0256$$

$$S_a^2 = \frac{n}{m-l} \sum (\bar{r}_j - R_j)^2 = 0,009$$

$$n=30; \quad m=12; \quad l=6$$

$$F = \frac{S_a^2}{S_{cp}^2} = \frac{0,009}{0,0256} = 0,351$$

$$F_{\alpha, k_1, k_2} = FINV(0,05; 6; 348) = 2,12$$

то адекватност на модел 2 също се потвърждава тъй като  $F < F_{\alpha, k_1, k_2}$ .

Ако за опростяване се използва модел 3 от вида  $R = l / (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4)$  - модел, представен с полином от по-нисша степен -  $C_A=0,49 < 1$  и адекватност не се потвърждава. Но ако същите числени данни са получени при малък обем на експерименталните наблюдения (например  $n=5$ ), то  $C_A=1,2 > 1$ , което при избран критерий за адекватност  $C_A=1$  потвърждава адекватност на модела. Но ако е приет критерий за адекватност  $C_A=1,33$ , то адекватност отново не се потвърждава.

Ако проверката (при  $n=5$ ) се направи чрез сравняване на дисперсиите:

$$F = \frac{S_a^2}{S_{cp}^2} = \frac{0,062}{0,0256} = 2,48$$

$$F_{\alpha, k_1, k_2} = FINV(0,05; 7; 48) = 2,2$$

то адекватност на модел 3 също не се потвърждава, тъй като  $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$ .

### 4. Заключение

Когато оценката за адекватност на математическия модел на предавателната характеристика на измервателно устройство се извършва чрез сравняване на експериментално получена оценка на математическото очакване с изчислените въз

основа на модела стойности може да бъде въведен в качеството на критерий за адекватност коэффициент на адекватност. При малък брой експериментални наблюдения е целесъобразно завишаване на граничната стойност на този критерий на 1,33, с което се повишава надеждността на оценката.

## 5. Литература

[1] Метрология и измервателна техника, под ред. на Х. Радев, Софттрейд, София, 2008

[2] **Александров А., И. Александрова**, Теория на експеримента, Екс-Прес, Габрово, 2012

[3] **Александрова И.**, Основи на инженерните изследвания, Габрово, УИ В. Априлов, 2003.

[4] **Зотов В.**, Принципи построения систем температурного контроля, Компоненты и технологии, №6, 2007

[5] [http://www.datasheetlib.com/datasheet/131614/b57861\\_epcos.html](http://www.datasheetlib.com/datasheet/131614/b57861_epcos.html)

## Данни за авторите:

**Румен Стойнев Йорданов**, машинен инженер, специалност “Механично уредостроене” (1977г.). Доцент (2000), Доктор (1997г.), катедра “Прецизна техника и уредостроене”, МФ, ТУ – София. Преобразуватели, измервателна техника, метрология и управление на качеството.

**Георги Кирилов Дюкенджиев**, машинен инженер, специалност “Механично уредостроене” (1981г.). Доцент (2000), Доктор (1994г.), катедра “Прецизна техника и уредостроене”, МФ, ТУ – София. Контролноизмервателна техника и управление на качеството.

# ADEQUACY OF THE MATHEMATICALLY MODELLED TRANSFER CHARACTERISTIC OF A MEASURING DEVICE

*Jordanov Rumens 1), Dukendjiev Georgi 2)*

<sup>1)</sup> Technical University - Sofia, 8, Kl. Ohridski St., BULGARIA, e-mail: [rsi@tu-sofia.bg](mailto:rsi@tu-sofia.bg)

<sup>2)</sup> Technical University - Sofia, 8, Kl. Ohridski St., BULGARIA, e-mail: [duken@tu-sofia.bg](mailto:duken@tu-sofia.bg)

*Abstract:* The transfer characteristic of a measuring device is in essence a mathematical model, which describes behavior of the converter measurement chain, and in many cases, it is necessary to make justifications how well the model describes real processes in the device, i.e. the adequacy of this model. In the presented work, methods for checking the adequacy of the model are described, based on statistical criteria. An example is also discussed, illustrating the influence of volume of experimental observations and opportunities for a reliable assessment and a small amount of observations.

*Key:* measurement, modeling.

## References

[1] Metrologiya i izmervatelna tehnikna, pod red. na Kh. Radev, Softtreyd, Sofiya, 2008

[2] **Aleksandrov A., I. Aleksandrova**, Teoriya na yeksperimenta, YEks-Pras, Gabrovo, 2012

[3] **Aleksandrova I.**, Osnovi na inzhenernite

izsledvaniya, Gabrovo, UI V. Aprilov, 2003.

[4] **Zotov V.**, Printsipy postroyeniya sistem temperaturnogo kontrolya, Komponenty i tekhnologii, №6, 2007

[5] [http://www.datasheetlib.com/datasheet/131614/b57861\\_epcos.html](http://www.datasheetlib.com/datasheet/131614/b57861_epcos.html)

# АДЕКВАТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

*Румен Йорданов <sup>1)</sup>, Георги Дюкенджев <sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup> ТУ - София, бул. "Климент Охридски" 8, e-mail: rsi@tu-sofia.bg

<sup>2)</sup> ТУ - София, бул. "Климент Охридски" 8, e-mail: duken@tu-sofia.bg

*Резюме:* Передаточная характеристика измерительного устройства по своей сути является математической моделью, которая описывает поведение преобразовательной цепи и во многих случаях необходимо сделать обоснование о том, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, протекающих в устройстве, т.е. оценить адекватность этой модели. В работе рассматриваются методы проверки адекватности, основанные на статистических критериях. Рассматривается также и пример, иллюстрирующий влияние объема экспериментальных наблюдений и возможности для надежной оценки и при небольшом количестве наблюдений.

*Ключевые слова:* измерение, передаточная характеристика, моделирование.