# НЯКОИ ИДЕИ ОТНОСНО ГРАФИЧНОТО РЕШАВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С КОМПЮТЪР

**Асен Велчев**

*Университет за Национално и Световно Стопанство, Студентски град, София 1700, бул. "8 декември", e-mail: asen_v@abv.bg*

# SOME IDEAS ABOUT COMPUTER-AIDED GRAPHICAL SOLVING OF IRRATIONAL EQUATIONS

**Asen Velchev,**

## ABSTRACT

The man is a mini-creator and thinker. In my view it is advisable IT not to do this instead of humans, but ease them by doing technical procedures and enhance their heuristics and creativity. The main goals of mathematics teaching is the development of critical logical thinking, ability to argue, intellectual diligence, enough concentration for long time, etc. Here are given ideas for solving and exploring irrational equations for high-school students, mathematics profile. There are marked some teaching methods as well.

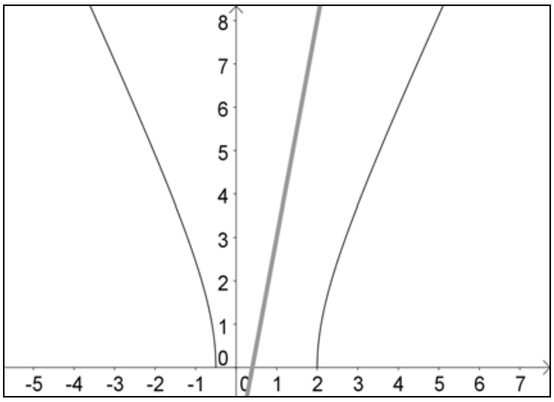
The graphical solving and computer solving in general is sometimes underestimated as proximal, not rigorous, when the result is irrational for example. But it is not so indeed, because, if the problem comes from real life, for practical implementation the result must be approximated; if such problem is taught to students, they need of psychological approximation to imagine "how much" is $\sqrt{17},\pi,e$, etc. With the program for dynamic geometry (and algebra) GeoGebra, for example, we attain accuracy to the 15-th decimal place on maximal zoom, which is noticeable. Here I use some calculus methods to prognose the behaviour of irrational terms, aiming to promote methods for computer-aided graphical solving of wider set of equations. Thus I enrich our earlier publications. The predictability of the terms in an equation is a key moment for graphical solving, because we must be able to say if an equation has or hasn't roots (intersection points of the graphs of the two sides) out of the screen area, especially when the terms are not elementary functions, which the students know. This way the advanced students will see practical implementation of calculus in real situation. It is a weakness in education to teach them to find asymptotes, intervals of concavity, etc, without showing them how and why we use them.

Човекът е творец и мислещо същество. Желателно е технологиите да не заместват тези дейности, а да подпомагат съставянето на хипотези, досещането и да облекчават технически процедури. Едни от най-главните цели на обучението въобще са развиване на критично логическо мислене, умствено трудолюбие, концентрация и т.н. Тук се предлагат идеи, свързани с графичното решаване на ирационални уравнения с компютър, приложими по-скоро при извънкласна работа в горния курс. Работата съдържа методически бележки.

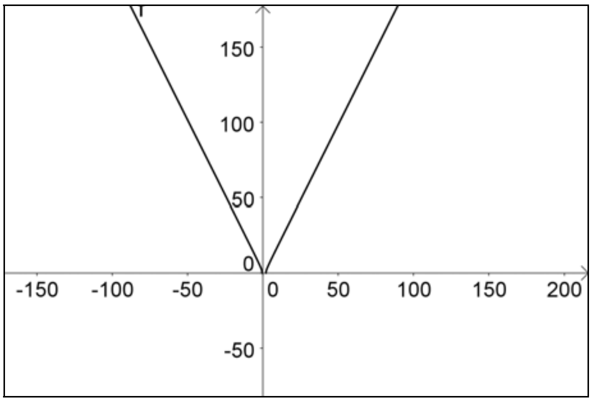
**Увод.** Графичното решаване и изобщо решаването на задачи с компютър бива критикувано, защото се получават приближения на решенията, когато те са ирационални числа, например. Това всъщност не е проблем, защото ако задачата е практическа, обикновено се прави закръгляване на резултата, приближение на ирационалните числа. Ако пък задачата е учебна, за учениците е нужна психологическа представа за големината на числа, като $\sqrt{17},\pi,e$ и т.н., което пак води до приближения. С програма GeoGebra например, при максимален zoom, постигаме точност до 15-тия десетичен знак, което е завидно добре. Тук са използвани някои методи от математическия анализ за **прогнозиране поведението на**

**ирационални изрази**, с цел разработване методи за графично решаване на възможно по-много видове уравнения. Тази прогнозируемост е ключов момент, защото трябва да може да се даде еднозначен отговор **дали дадено уравнение има или не решения, освен видимите на екрана**. Така надграждам наши разработки [1] и [3]. А този начин учениците ще могат да почувстват по-ясно **реалното значение и приложение на анализа при решаването на възникнал проблем.** Слабост на обучението би било, според мен, ако се намират асимптоти и интервали на вдлъбнатост и изпъкналост, без да се виждат приложенията им. В [2] авторите дават технология за аналитично решаване на ирационални уравнения с програмата Maple и верификация с графично решаване, но без прогнозиране на ирационалните изрази във всеки един случай.

**1.** $5x-2=\sqrt{4x^2-6x-4}$ .




**Фиг. 1:** $5x-2=\sqrt{4x^2-6x-4}$



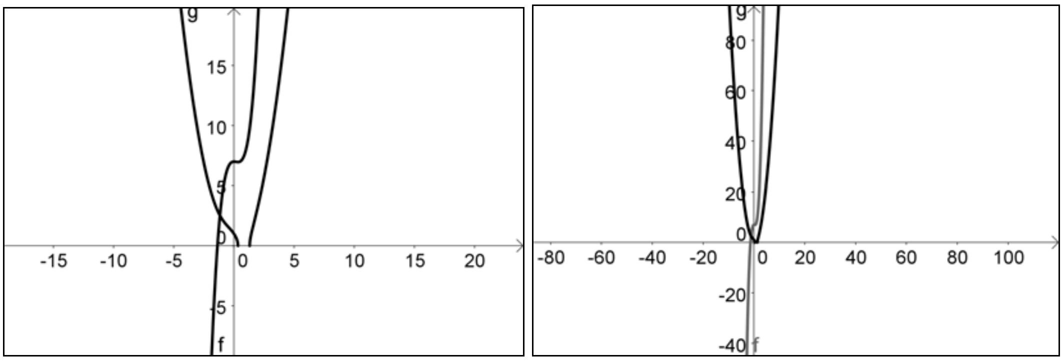

**Фиг. 2:** $g(x)=\sqrt{4x^2-6x-4}$

**Решение:** Графиката на функцията $y=5x-2$ е права линия (**Фиг. 1**), а тази на $g(x)=\sqrt{4x^2-6x-4}$ можем да разгледаме при намален мащаб, с включен по-голям участък от нея на екрана (**Фиг. 2**).

Наблюдението показва, че в приближение графиката се състои от два лъча. Как да изследваме и обясним на учениците тази "линейност"? $y=\sqrt{4x^2-6x-4}$ е уравнение на "горната" част от клоните на хиперболата $y^2=4x^2-6x-4 \Leftrightarrow 4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$ с център $C\left(\frac{3}{4},0\right)$ и полуоси $\frac{5}{4}$ и $\frac{5}{2}$. Също така $\lim\sqrt{4x^2-6x-4}=\lim|x|\sqrt{4-\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}}=\lim(2|x|)$ при $x\to\pm\infty$, т.е. $y=2|x|$ е асимптота на $y=\sqrt{4x^2-6x-4}$. На **Фиг. 1** левият клон на $y=\sqrt{4x^2-6x-4}$ е в друг квадрант спрямо $y=5x-2$, а десният се отдалечава устойчиво от правата с нарастване на *x*, т.к. $y=\sqrt{4x^2-6x-4}$ е вдлъбната функция.

Ако се получи обща точка на две графики, за максимална точност я придвижваме в центъра на екрана и даваме максимален zoom.

**Обобщение:** Функцията $y=\sqrt{a^2x^2+bx+c}$ има асимптоти $y=a|x|$ при $x\to\pm\infty$, което улеснява прогнозирането на поведението на графиката й. Функция от вида $y=\sqrt{a^2x^{2k}+f(x)}$ има (обобщена) асимптота $y=|a||x|^k$ при $x\to\pm\infty$, където $f(x)$ е многочлен от степен $n\geq 1, n<2k$. Можем да продължим обобщението с функции от вида $y=\sqrt[n]{a^nx^{nk}+f(x)}$ с асимптота $y=|a||x|^k$ при четно *n*, а при нечетно - $y=ax^k$, където $f(x)$ е многочлен от степен $m<nk$. Това дава възможност за прогнозиране и решаване на уравнения от вида $bx^l+g(x)=\sqrt[n]{a^nx^{nk}+f(x)}$, където $g(x)$ е многочлен от степен $s\geq 1, s<l$. **Пример:** $2x^3-x^2+7=\sqrt{x^4-3x+1}$.

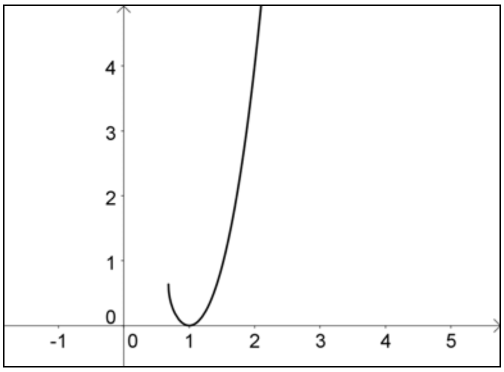


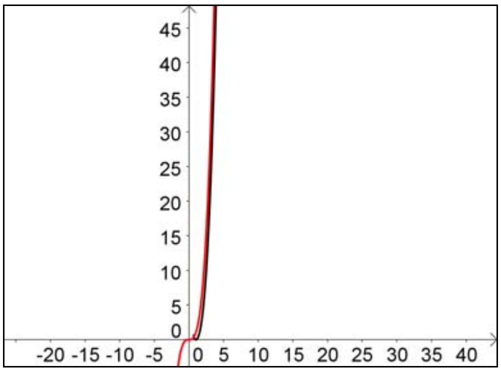

**Фиг. 3 и 4:** Графика на $2x^3-x^2+7=\sqrt{x^4-3x+1}$ „отблизо” и „отдалеч”

**Решение:** $\sqrt{x^4-3x+1}\approx x^2$ при $x\to\pm\infty$, а $2x^3-x^2+7\approx 2x^3$. Графиката на $2x^3$ е по-стръмна от тази на $x^2$ и втора обща точка, освен тази на левия чертеж, графиките нямат.

**Така може, без особени усилия, да бъде разширено понятието асимптотично поведение на функция.**

Функцията $y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$ има асимптота $y=ax$ при $x\to\infty$ и $c>0$. Можем да усложним функцията на $y=ax^k+f(x)\pm\sqrt{bx+c}$. Тя има асимптота $y=ax^k$ при $x\to\infty$ и $b>0$, ако $f(x)$ е многочлен от степен $n\geq 1, n<k$. Функция от вида $y=ax^k+b(x)\pm\sqrt[n]{px^m+q(x)}$ има асимптота $y=ax^k$ при $x\to\infty$ и $p>0$. Тук $b(x)$ е многочлен от степен $n\geq 1, n<k$, $q(x)$ - от степен $s\geq 1, s<m$, а $\frac{m}{n}<k$. **Пример:** $x^3-x+1-\sqrt{x^3+x-1}=0$.



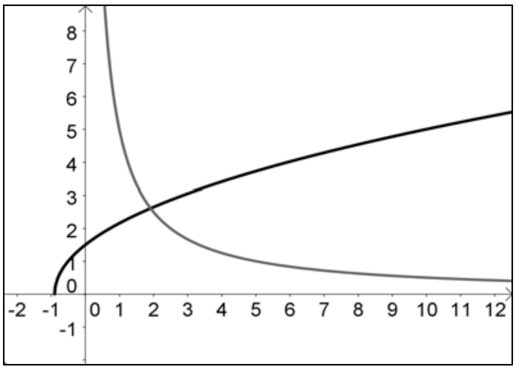

**Фиг. 5 и 6:** Функцията $x^3 - x + 1 - \sqrt{x^3 + x - 1}$ сама и заедно с $y = x^3$

Освен $x = 1$, друго решение тук явно няма. При това се вижда, че практически асимптотата в някои случаи илюстрира добре *някои свойства* на първоначалната функция не някъде в безкрайността, а дори при малки стойности на $x$. Доколко точно обаче тя я приближава *по стойност* при малки $x$? Изглежда – много точно, защото двете графики на **Фиг. 6** почти се сливат, но всъщност това е подвеждащо и следва да му се обърне специално внимание. Ако извадим $x^3 - x + 1 - \sqrt{x^3 + x - 1}$ от $x^3$, се получава $x - 1 + \sqrt{x^3 + x - 1}$. Абсолютната разлика между двете функции се увеличава с нарастване на $x$ и дори става безкрайно голяма, но *относителната разлика* става пренебрежимо малка. Учениците може да се помъчат да дадат обяснение защо тогава графиките почти се "слепват".

Ограничените функции са асимптотично подобни на константи. Затова функцията $y = ax^k + b(x).c(x) + d(x) \pm \sqrt[n]{px^m + q(x).r(x) + t(x)}$, където $c(x)$, $d(x)$, $r(x)$ и $t(x)$ са ограничени функции, има асимптота $y = ax^k$ при $x \to \infty$ и $p > 0$. Например $y = 4x^3 + (x^2 - x + 4).\sin(x) + 2\cos(x^2) + \sqrt[5]{3x^8 + (x^6 - x^4 - 5).arctg(x) + 3}$.

Както се вижда, откриват се огромни възможности за решаване на разнообразни ирационални уравнения. Понякога се явяват практически трудности при работа с графиките, но тук няма да се спираме на тях. Така или иначе, открива се поле за изследване и трупане на опит за ученици и учители.

**2.** $\sqrt{2x + \sqrt{2x + 5}} = \dfrac{5}{x}$ - сложен радикал.




**Фиг. 7**: Графично представяне на уравнението $\sqrt{2x + \sqrt{2x + 5}} = \dfrac{5}{x}$.

Функцията $y = \sqrt{2x + \sqrt{2x + 5}}$ е строго монотонно растяща, което може да се установи с логически разсъждения и без производни. Решението на **Фиг. 7** е **единствено**, т.к. функцията $y = \dfrac{5}{x}$ е намаляваща, а ДМ на $y = \sqrt{2x + \sqrt{2x + 5}}$ е ограничено отдолу, т.е. графиката ѝ има *само* този клон на чертежа. Това е достатъчно за решението на задачата в случая, но нека прогнозираме графиката на израза $y=\sqrt{2x+\sqrt{2x+5}}$. Тя наподобява графиката на $y=\sqrt{x}$. Имайки благодарение на компютъра това наблюдение, учениците може да бъдат насочени да търсят връзка между двете функцииии, а тя е: $\lim\frac{\sqrt{2x+\sqrt{2x+5}}}{\sqrt{2x}}=1, x\to\infty \ \Rightarrow y=\sqrt{2x}$ е асимптотично равна на дадената функция. Тук софтуерът се използва за генериране на хипотези.

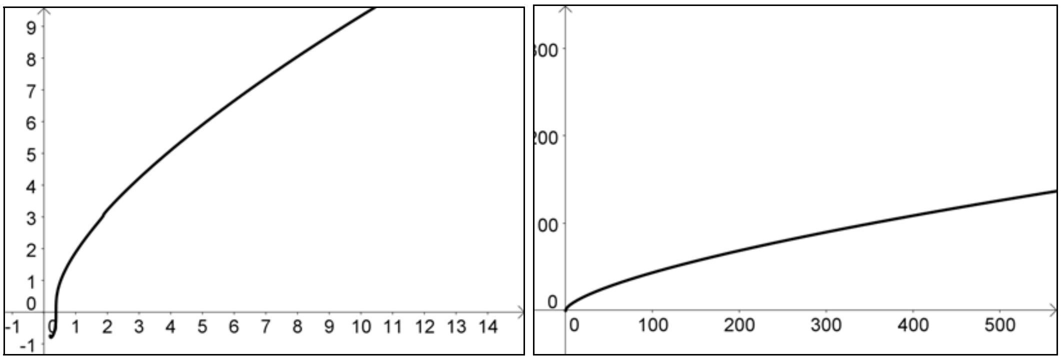
Изобщо, функция от вида $\sqrt{ax+b\pm\sqrt{cx+d}}$ има асимптота $\sqrt{ax}$ при $x\to\infty$, $a>0$ и $c>0$, а функция от вида $\sqrt{ax^k+b(x)\pm\sqrt{cx^m+d(x)}}$ има асимптота $\sqrt{ax^k}$ при $x\to\infty$, $a>0, c>0, \frac{m}{2}<k$, ако $b(x)$ е многочлен от степен $n\geq 1, n<k$, а $d(x)$ - от степен $l\geq 1, l<m$. Функция от вида $\sqrt[n]{ax^k+b(x)\pm\sqrt[l]{cx^m+d(x)}}$ пък има асимптота $\sqrt[n]{ax^k}$ при аналогични уговорки. Степенните функции с рационален показател по свойства са монотонно растящи при $x>0$. При по-голям от 1 степенен показател и при $x>0$ те са растящи и изпъкнали, а при $x>0$ и показател по-малък от единица – растящи и вдлъбнати. Това може да се докаже с производни, а се вижда от графиките им. Онези от тях, които са дефинирани при $x<0$, имат клон или във втори, или в трети квадрант, симетричен на този от първи квадрант *съответно* спрямо ординатната ос или координатното начало. Това ги прави удобни за прогнозиране.

Ако $c(x)$, $d(x)$, $r(x)$ и $t(x)$ са ограничени функции, то функцията $y=\sqrt[n]{ax^k+b(x).c(x)+d(x)\pm\sqrt[l]{px^m+q(x).r(x)+t(x)}}$ има асимптота $y=\sqrt[n]{ax^k}$.

**Пример:** $\sqrt[3]{5x^6+x.\sin x+5\cos(x)-\sqrt{x^2+3x.arctg(x)+\sin^4(x)}}$.

**Общо правило за образуване на обобщения е старшият член $ax^k$ да нараства по-бързо от всички останали, взети заедно.** По тази причина функцията $y=\sqrt[n]{ax^k+b(x).c(x)+d(x)\pm\sqrt[l]{px^m+q(x).r(x)+t(x)}}$ има асимптота $\sqrt[n]{ax^k}$ и когато $r(x)$ и $t(x)$ са логаритми от *x* или от полиноми на *x* от произволно висока степен. $r(x)$ и $t(x)$ може да са също логаритми от "полиноми" на *x* с коефициенти ограничени функции на *x* или (вградени) логаритми от полиноми на *x*. Би могло дори например $r(x)=\ln(\ln(\ln(x)))$, т.к. функцията $r(x)$ в този случай расте по-бавно от $\ln(x)$. Дълбочината на влагане може да бъде произволно голяма. Може да се влагат също ограничени положителни функции в логаритъм или логаритъм в ограничена функция, многочлен в ограничена функция и пр. Може и радикали да се влагат един в друг с произволна дълбочина, т.к. функция от вида $y=\sqrt[n]{a_1x^k+b_1(x)\pm\sqrt[l]{a_2x^m+b_2(x)\pm\sqrt[h]{a_3x+b_2(x)\pm\sqrt[g]{\ldots\pm\sqrt[p]{\ldots}}}}}$ има асимптота $\sqrt[n]{a_1x^k}$, стига това да е най-високата степен на *x*. **Трябва само ДМ на функцията да е неограничено отдясно**. **Това важи за всички обобщения, разгледани в статията.**

**Пример:** $y=\sqrt[3]{2x^2+\sqrt[3]{x^3-2x-\sqrt{5x-1}}}$ има асимптота $y=2x^{\frac{2}{3}}$:




**Фиг. 8 и 9**: Графика на функцията $y=\sqrt[3]{2x^2+\sqrt[3]{x^3-2x-\sqrt{5x-1}}}$ “отблизо” и “отдалеч”

Изрази от вида $\sqrt{a_1x^k+b_1(x)}+\sqrt{a_2x^k+b_2(x)}+\ldots+\sqrt{a_nx^k+b_n(x)}$ са също прогнозируеми и имат асимптота от вида $\sqrt{ax^k}$ . Тук $b_i(x)$ са или полиноми от степени по-малки от $k$, или ограничени функции, или радикали, или логаритми или комбинации от тези. А изрази от вида $\sqrt{a_1x^k+b_1(x)}+\sqrt{a_2x^l+b_2(x)}+\ldots+\sqrt{a_nx^m+b_n(x)}$, където $\max(k,l,m)=k$, имат асимптота $\sqrt{a_1x^k}$ Така сума от няколко радикала може да бъде приближавана само с един радикал.

Друг клас прогнозируеми ирационални уравнения са тези, на които дефиниционното множество на изразите е ограничено и те образуват непрекъснати в него функции, т.к. при подходящ мащаб графиките им се поместват изцяло на екрана. Например $\sqrt{x-5}+2\sqrt{2x-11}-\sqrt{100-x}=0$. Аналитичното му решаване “на ръка” е трудоемко.

Това е в общи линии идеята. Тя може да бъде разширявана по аналогия и с други класове изрази.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Табов Й., В. Данова, А. Велчев, 2008. Един опит за сравнение на методи за преподаване на темата “Тригинометрични уравнения”, Proceedings of International Conference “Computer Methods in Science and Education”, 12-14 June, Varna – Bulgaria, 252-256
2. Stanilov Gr., Sl. Slavova, 2005. Application of computer methods solving irrational equations, Proceedings of ICME 3-5 June, Svishtov - Bulgaria, 266-272
3. http://math.unipa.it/~grim/QRDM_Tabov-Velchev_20_2010.pdf.