ЕДИН ОПИТ ЗА СРАВНЕНИЕ НА МЕТОДИ ЗА ПРЕПОДАВАНЕ НА ТЕМАТА "ТРИГОНОМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ"

ЙОРДАН Б. ТАБОВ, ВАНЯ ХР. ДАНОВА,
АСЕН П. ВЕЛЧЕВ

AN ATTEMPT TO COMPARE METHODS FOR TEACHING THE TOPIC "TRIGONOMETRIC EQUATIONS"

JORDAN B. TABOV, VANYA HR. DANOVA, ASEN P. VELCHEV

ABSTRACT: We present an attempt for computer use for solving trigonometric equations (TE) with 10th graders from the Sofia mathematics school as a means for: 1) introduction of the concept; 2) visualization and analyzing of the studied matter without computer; 3) discovering new sides of the concept in didactic situations unimaginable without computer; 4) verification of the results obtained by analytical solving of TE. This work is based on our earlier experience.

KEYWORDS: graphical solving of equations, trigonometrical equations, experiment.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Представяме опит за използване на компютър за графично решаване на тригонометрични уравнения (ГРТУ) с ученици от 10 клас от Софийската математическа гимназия. Развитието на новите технологии прави възможно все по-точното представяне на графики на функции на компютърния екран и ГРТУ. На екрана е само част от координатната равнина, а с това и само част от корените на уравненията. Но тригонометричните функции (ТФ) са периодични. Достатъчно е на екрана да се вижда част от графиката, включваща един период.

2. НАПРАВЕНОТО ПРЕДИ НАС.

Дидактически модел за решаване на параметрични задачи с помощта на GEONExT-ов динамичен чертеж е предложен от Т. Тонова, В. Гушев и Е. Копева [1], [2]. Б. Лазаров и А. Василева [3], [4] - графични решения на параметрични системи уравнения с помощта на MATHEMATIKA. Гр. Станилов и Сл. Славова решават с MAPLE ирационални уравнения [5]. Дотук задачите **само се онагледяват** (с евристична цел), но се постига визуализация, недостъпна без компютър. [6] описва ГРТУ с графичен калкулатор.

3. НАПРАВЕНОТО ОТ НАС.

Преди модул ТУ направихме входящ тест и в едната паралелка започнахме да преподаваме ТУ стандартно, а в другата – с компютър, графично. Целият модул е 10 учебни часа. Направихме междинен тест и разменихме паралелките: първата запознахме с компютърния метод, а втората – със стандартния. Завършихме с трети тест. "Стандартния" модул ТУ структурирахме така: **1)** Основни ТУ; **2)** ТУ, свеждащи се към алгебрични относно $\sin x$, $\cos x$ и $tg\ x$; **3)** Решаване на ТУ с въвеждане на спомагателен ъгъл; **4)** Решаване на ТУ чрез смяна на неизвестното; **5)** Решаване на ТУ чрез разлагане на множители; **6)** Решаване на ТУ с формули за понижение на степента; **7)** ТУ, решими чрез оценка на лявата и дясната част; **8)** ТУ, съдържащи радикали и модули; **9)** ТУ от различни видове (свеждани към познат вид).

При ГРТУ всички уравнения се решават по един начин. Учениците сами бързо се ориентираха как да оперират с програмата GEONExT/GeoGebra. ТУ, които решавахме графично:

Зад 1: $\cos\left(\frac{x}{2}+7\pi\right)+3\sin x=0$. //Отговорът $(2k+1)\pi, \approx 19^\circ 15' + 720^\circ k$ $\approx 340^\circ 48' + 720^\circ k$ е неочакван и при аналитично решаване може да разколебае ученика, да го подтикне да търси грешки в решението си. Чрез задачи като тази се разбива митът, че аналитичното решение е винаги точно. GeoGebra дава решенията с точност до 6-тия десетичен знак. Така графичното решение е достатъчно точно, а за практическо приложение аналитичното решение също трябва да се закръглява и става "неточно".

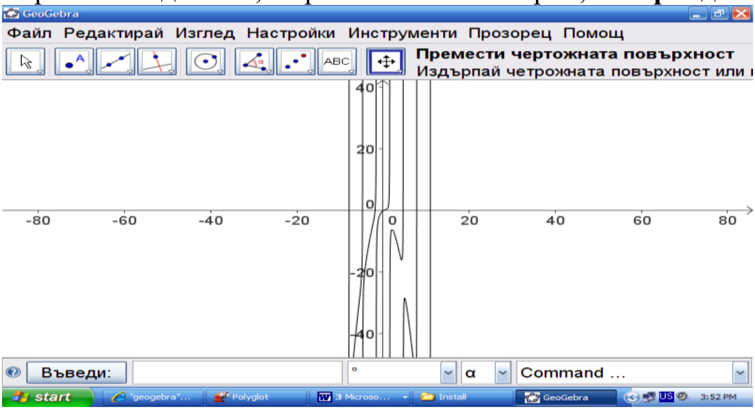
Зад 2: Намерете периода на ТФ $y=\sin^2 x+\sin^6 x$ и се обосновете. /// При повечето задачи поставяхме устно въпроса за период на сума, произведение и т.н. на периодични функции, за периоди на решения на ТУ, как обединяваме серии от решения, напр: $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\kappa\pi\right\}\cup\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi\right\}\cup\{\pi+2\kappa\pi\}=\frac{k\pi}{3}$

Зад 3: $2^{\sin x}-4=0$. //ТФ в степенен показател. Функция от периодична функция също е периодична. Няма решение – включването на такива задачи е полезно за работа в клас и за домашно.

Зад 4: $3-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. //Лош отговор: $\pm 70^\circ 32' + k360^\circ$; графиките на $f(x)$ и $g(x)$ на места се сливат. Преобразуваме във вида $F(x)=0$. Графиката не се "слива" с абсцисата в никой подинтервал. Проблемът се реши.

Зад 5: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+2x$. //Аналитично нерешимо ТУ. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x-\cos x=1+2x$ е равносилно. Отляво е ТФ, а отдясно – монотонна функция $\Rightarrow$ и двете са **предсказуеми**.

Зад 6: $\tan x-x^2=0$ при $x\in(-\pi;\pi)$. //Графиката на $y=\tan x-x^2$ е непозната и непредсказуема (**Фиг. 1**). Изглежда сякаш ограничена в отвесна ивица. Грешката е софтуерна. GeoGebra не се справя с всякакви графики, а GEONExT е още по-слаб. Т. е. да не се разчита на софтуера да даде вярна графика на непозната функция. Преобразуваме уравнението във вида $\tan x = x^2$. Чертежът подсказва, че решенията са безброй, **непериодични**.



Фиг. 1: $y = \tan x - x^2$.

Зад 7: Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които двойката уравнения са еквивалентни:

$$\begin{cases} \sin 3x = a \sin x + \left(4 - 2|a|\right)\sin^2 x \\ \sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x \end{cases}.$$

Решение: Привеждаме ТУ във вида $\begin{cases} F(x) = 0 \\ G(x) = 0 \end{cases}$. Те са еквивалентни точно когато пресечните точки на графиките на *F(x)* и *G(x)* с абсцисата са едни и същи. Не пречи двете графики да имат пресечни точки и другаде - дискутирахме с учениците.

“Компютърната” паралелка усвояваше материала много по-бързо. С нея решавахме и системи ТУ с две неизвестни, неравенства; работихме и с параметрични криви. Насочвахме вниманието на учениците към симетрии и периоди в графиките на по-интересни ТФ.

4. Тестовите резултати. Впечатления от уроците. В края на модула учениците трябва да могат да решават произволно избрано ТУ с повишена трудност. Входящият тест показа ниски средноаритметични резултати (САР) - 13.46 и 16.12 за двете паралелки при 23 максимално възможни точки. При изучаване на ТУ учениците затвърдиха някои знания и в края на модула биха решили същия тест по-успешно.

Междинният тест показа ниски резултати за силната паралелка, изучила темата “стандартно”. При максимален брой точки 53 нейния САР е 24,85, т.е. по-малко от половината – а повечето задачи бяха стандартни и подредени в последователността на преподаване. Това е класът с по-висок успех по математика като цяло. 38.26 е САР за “компютърната паралелка”. Грешки: изпускат серии решения или прибавят грешен период към частните решения, не се досещат да обединяват серии решения в едно. Нерешени задачи – рядко. Имаше 6 задачи върху понятието еквивалентни уравнения - среден резултат и за двата класа.

На окончателния тест трябваше учениците да решат аналитично първите 10 задачи, 11 - с компютър и 4 параметрични – по избор. С първите 10 учениците се справиха зле. Последните 4 масово решаваха с компютър и при точкуването ги причислихме към 11-те. Върху тези 15 задачи (33 точки) САР е 20.84 за силната паралелка и 20.96 на слабата. САР от 5,28 при 20 възможни точки за аналитично решените 10 задачи за силната и 5,78 за слабата паралелка. Нагледния ГРУ курс, предшестващ стандартния, помогна на по-слабата паралелка да се изравни с другата. Часовете с компютър могат да се редуцират до 5, а стандартния модул да се олекоти – само основни типове ТУ, 8 часа. Удачно е намаляване и броя тестови задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тонова Т., В. Гушев, Е. Копева, “Образователна среда за графично решаване на параметрични задачи. Модул “задачи”” - Математика и информатика, кн. 2, 2006, стр. 9-18.

[2] http://dinamath.hit.bg

[3] Лазаров Б., А. Василева, “Некоторые дидактические аспекты ...” - http://www.math.bas.bg/omi/albena/MITE/MITE2/ PPP3.pdf.

[4] Lazarov B., Mathematics and Informatics Quarterly, vol. 7, No. 4, 1997.

[5] Stanilov, G., S. Slavova, Application of computer methods solving irrational equations, Proceedings of ICME 3-5 June 2005, Svishtov - Bulgaria, pp. 266-272.

[6].http://www.zahniser.net/~math/index.php?title=Trig%20Solutions%20Review (GRAPH CALC) Trig Solutions Review

СТ. Н. С. СТ. Д-Р ЙОРДАН БОРИСОВ ТАБОВ

Институт по математика и информатика - БАН, София ул. Акад Г. Бончев 8

E-MAIL: JORDAN@TABOV.COM

Ваня Христова Данова

Софийска математическа гимназия “Св. Паисий Хилендарски”,

E -MAIL: DANOVA@GBG.BG

Асен Петков Велчев

София 1336 жк Люлин бл. 348 вх. 1 ет. 4 ап. 15

E -MAIL: a_velchev@fmi.uni-sofia.bg