



## РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ НА ЧЕТИРИРОТОРЕН ХЕЛИКОПТЕР

ХРИСТО ГЕНДОВ, ПЕТКО ПЕТКОВ

**Резюме:** В работата се разглежда синтезът на робастна система за ъглова стабилизация на миниатюрен четирироторен хеликоптер. Изведен е линеаризиран модел на хеликоптера с входна мултипликативна неопределеност, за който с помощта на  $\mu$ -синтеза е получено управляващо устройство с две степени на свобода. Дадени са честотните характеристики на затворената система, които потвърждават постигането на желаното качество на системата. Описан е синтез на тримерен ПД-регулатор, с помощта на който се постига желаното положение на хеликоптера в тримерното пространство. Показани са резултатите от симулирането на нелинейната затворена система, които потвърждават ефективната работа на робастния регулатор при наличието на смущаващи моменти по трите оси на въртене.

**Ключови думи:** четирироторен хеликоптер, робастно управление,  $\mu$ -синтез

## ROBUST CONTROL OF A QUAD-ROTOR

HRISTO GENDOV, PETKO PETKOV

**Abstract:** In this work, the design of a robust control system for attitude stabilization of a miniature quad-rotor is presented. A linearized model of the quad-rotor with input multiplicative uncertainty is derived for which a two-degree-of-freedom  $\mu$ -controller is determined. The closed-loop frequency responses confirm that the desired performance of the system is achieved. A 3D PID-controller is used to achieve the desired position of the quad-rotor in the space. Simulation results for the nonlinear closed-loop system are shown which confirm the efficient work of the robust controller under the presence of disturbance torques along the three rotation quad-rotor axes.

**Key words:** quad-rotor, robust control,  $\mu$ -synthesis

### 1. Увод

В последно време се наблюдава значителен интерес към разработването на миниатюрни летателни апарати, с помощта на които могат да се решават различни задачи с гражданско и военно предназначение. От гледна точка на теория на управлението и задачите за управление в реално време значителен интерес представлява четирироторния хеликоптер, който може да се използва за откриване и наблюдение

на явления в условия, когато използването на друг тип летателни апарати е затруднено (тесни градски улици, разрушени сгради и т.н.). Четирироторният хеликоптер е снабден с четири витла, задвижвани от електродвигатели, инерциално измервателно устройство и контролер с вградена система за управление. Въпросите, свързани с проектирането и моделирането на четирироторни хеликоптери са разгледани в редица литературни източници, напр. [1], [2], [3], [5], [6]. На фиг. 1 е показан

четирироторния хеликоптер, разработен в кат. Системи и управление при ТУ – София.



Фиг. 1. Четирироторен хеликоптер

В настоящата работата се разглежда задачата за синтез на робастна система за ъглова стабилизация на миниатюрен четирироторен хеликоптер. Изведен е линеаризиран модел на хеликоптера с входна мултипликативна неопределеност, за който с помощта на  $\mu$ -синтеза е получено управляващо устройство с две степени на свобода. Дадени са честотните характеристики на затворената система, които потвърждават доброто следене на заданията и подтискането на смущаващите въздействия в желания честотен диапазон. Описан е синтеза на тримерен ПД-регулатор, с помощта на който се постига желаното положение на хеликоптера в тримерното пространство. Показани са резултатите от симулирането на нелинейната затворена система, които потвърждават ефективната работа на робастния регулатор при наличието на смущаващи моменти по трите оси на въртене.

## 2. Модел на четирироторния хеликоптер с неопределеност

Математическият модел на четирироторния хеликоптер се извежда при някои опростяващи предположения. По-специално, приема се, че корпусът на хеликоптера е абсолютно твърдо тяло, чието постъпателно и ъглово движение се описва с уравненията на Нютон-Ойлер, дадени по-долу.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr - wq - g \sin(\theta) + \frac{X}{m} \\ \dot{v} &= wp - ur + g \sin(\phi) \cos(\theta) + Y/m \\ \dot{w} &= uq - vp + g \cos(\phi) \cos(\theta) + Z/m \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= qr(I_{yy} - Y_{zz})/I_{xx} + L/I_{xx} \\ \dot{q} &= pr(I_{zz} - I_{xx})/I_{yy} + M/I_{yy} \\ \dot{r} &= pq(I_{xx} - I_{yy})/I_{zz} + N/I_{zz} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + \sin(\phi) \tan(\theta) + \cos(\phi) \tan(\theta) r \\ \dot{\theta} &= \cos(\phi) q - \sin(\phi) r \\ \dot{\psi} &= \left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}\right) q + \left(\frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}\right) r \end{aligned} \quad (3)$$

В тези уравнения  $u, v, w$  са линейните скорости по осите  $X, Y$  и  $Z$  на свързаната с тялото координатна система,  $p, q$  и  $r$  са ъгловите скорости,  $\phi, \theta, \psi$  са Ойлеровите ъгли,  $X, Y, Z$  са силите по съответните оси,  $L, M, N$  – моментите около тези оси,  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  – инерционните моменти, а  $m$  е масата на апарата. Силите по трите оси се определят от изразите

$$X = X_{fus} \quad Y = Y_{fus} \quad Z = Z_{fus} - T$$

където компонентите  $X_{fus}, Y_{fus}, Z_{fus}$  отчитат силите на челното съпротивление при движението на хеликоптера във въздушната среда, а

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (4)$$

е сумата от теглителните сили на двигателите. Теглителните сили на отделните двигатели се апроксимират достатъчно точно с квадратични зависимости от съответните скорости на въртене,

$$T_1 = b\omega_1^2, T_2 = b\omega_2^2, T_3 = b\omega_3^2, T_4 = b\omega_4^2 \quad (5)$$

където  $b$  е коефициент, определен за работната точка, в частност за режима на висене на хеликоптера. Подобно на това се приема, че съпротивителните моменти при движението на витлата зависят квадратично от скоростите на въртене, т.е.

$$Q_1 = d_q\omega_1^2, Q_2 = d_q\omega_2^2, Q_3 = d_q\omega_3^2, Q_4 = d_q\omega_4^2 \quad (6)$$

Тъй като динамиката на двигателите е значително по-бърза от динамиката на хеликоптера, тя се пренебрегва и ъгловата скорост на витлата се приема пропорционална на съответните управляващи сигнали,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= K_m U_1 \quad \omega_2 = K_m U_2 \\ \omega_3 &= K_m U_3 \quad \omega_4 = K_m U_4 \end{aligned} \quad (7)$$

Управляващите сигнали на двигателите са получени чрез широчинно-импулсна модулация и се измерват в проценти от максималната ширина на импулсите.

Ъгловите моменти се определят от зависимостите

$$\begin{aligned} L &= -I_{rot}q(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ &\quad + d(-T_2 + T_4) + M_{dx} \\ M &= I_{rot}p(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ &\quad + d(T_1 - T_3) + M_{dy} \\ N &= -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 + M_{dz} \end{aligned} \quad (8)$$

където  $I_{rot}$  е общият инерционен момент на всяко едно от витлата,  $d$  е разстоянието между осите на витлата и центъра на масата на хеликоптера, а  $M_{dx}, M_{dy}, M_{dz}$  са смущаващите моменти по съответните оси на апарата.

Уравненията на четирироторния хеликоптер се линеаризират числено, като се използва нелинейния модел в Simulink™ и се прилага функцията `linmod` от MATLAB™. За целта предварително се определят параметрите за установен режим на работа на хеликоптера, за какъвто се приема режима на висене. При този режим постъпателните и ъгловите скорости на хеликоптера се нулеви, а теглителните сили на витлата са еднакви и сумата им компенсира теглото на апарата. Тези теглителни сили се получават за постоянни управляващи сигнали на двигателите. В резултат се получава линеен модел от 9-ти ред

$$\begin{aligned} \dot{x}_q &= Ax_q + B \begin{bmatrix} u_c \\ dist \end{bmatrix} \\ y_q &= Cx_q + D \begin{bmatrix} u_c \\ dist \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_q &= [u, r, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi] \\ u_c &= [U_1, U_2, U_3, U_4] \\ dist &= [M_{dx}, M_{dy}, M_{dz}] \end{aligned}$$

където  $A, B, C, D$  са матрици със съответните размерности.

Уравнения (9) се представят в честотната област като

$$y_q(s) = G_{quad}(s) \begin{bmatrix} u_c(s) \\ dist(s) \end{bmatrix} \quad (10)$$

където предавателната матрица на хеликоптера  $G_{quad}(s)$  се определя от матриците  $A, B, C, D$ .

За отчитане на грешките от апроксимация и немоделирана динамика е разработен модел с неопределеност. Уравнение (10) представлява номиналния модел на хеликоптера. Към всеки управляващ сигнал е добавена входна

мултипликативна неопределеност във вида  $(1 + \delta_i)$ , като  $|\delta_i| < 0.1, i = 1, \dots, 4$

Така зададена неопределеността е честотно независима и във всяка компонента на управлението може да достигне до 10 %. За предавателната матрица на линеаризирания модел с неопределеност се получава

$$G(s) = G_{quad}(I_7 + \text{diag}(\Delta, I_3))$$

където

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$$

е матрицата на неопределеността.

Описанието на обекта се задава с уравнението

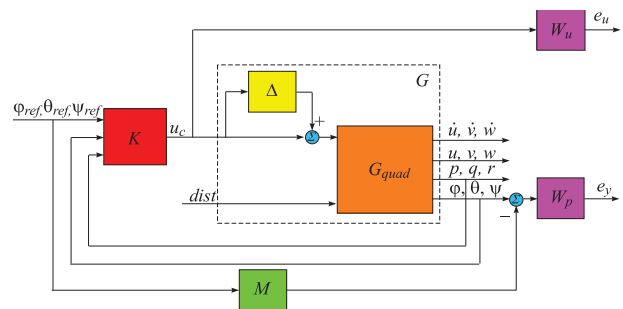
$$y = G(s) \begin{bmatrix} u_c \\ dist \end{bmatrix} \quad (11)$$

След въвеждане на  $G = [G_u \ G_d]$ , уравнение (11) се представя като

$$y = G_u u_c + G_d dist \quad (12)$$

където  $G_u$  и  $G_d$  са предавателните матрици по управлението и по смущаващите моменти.

### 3. $\mu$ -синтез на управляващо устройство



Фиг. 2. Затворена система с изисквания към качеството

Структурната схема на затворената система, включваща тегловните функции на качеството, е показана на фиг. 2. Целта на синтеза е да се намери управляващо устройство  $K$  с две степени на свобода, за което поведението на затворената система да бъде максимално близко до поведението на желания модел  $M$  в присъствието на смущаващи въздействия  $dist$  и неопределености в модела на хеликоптера. С оглед минимизиране на влиянието между каналите на управление, предавателната матрица на желания модел се избира като диагонална матрица

$$M = \text{diag}(W_{m1}, W_{m2}, W_{m3}) \quad (13)$$

чийто елементи са избрани като

$$W_{m1} = W_{m2} = W_{m3} = \frac{1}{3^2 s^2 + 2 \times 3 \times 0.7s + 1} \quad (14)$$

Тегловната предавателна матрица на качеството

$$W_p(s) = 0.9 \frac{10^{-2}s+1}{10^{-2}s+10^{-1}} I_{3 \times 3} \quad (15)$$

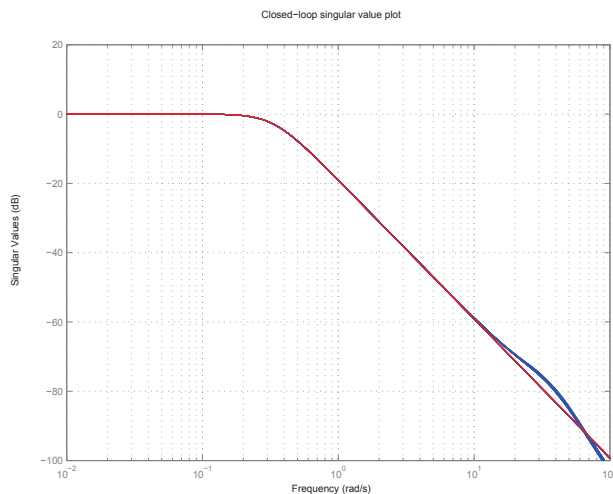
се избира така, че да осигури близост между затворената система и модела в нискочестотния диапазон, където смущаващите въздействия имат максимален ефект. Тегловната матрица на управляващите въздействия

$$W_u(s) = 2.10^{-3} \frac{2.10^{-3}s+1}{3.10^{-6}s+1} I_{4 \times 4} \quad (16)$$

се избира така, че да ограничи високочестотните съставки на управляващите въздействия.

$\mu$ -синтезът на управляващото устройство се извършва с функцията *dksyn* от програмната система MATLAB™. Минималната стойност на структурираната сингулярна стойност  $\mu$  се получава след три итерации и е равна на 0.740, т.е., затворената система постига робастно качество при разглежданата неопределеност.

#### 4. Свойства на затворената система

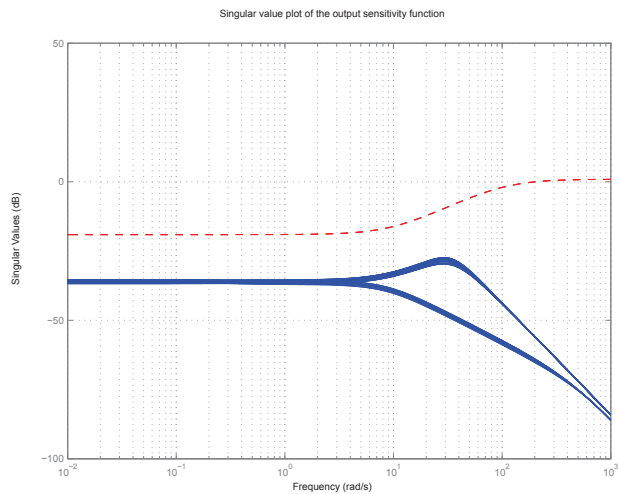


Фиг. 3. Честотни характеристики на затворената система и модела

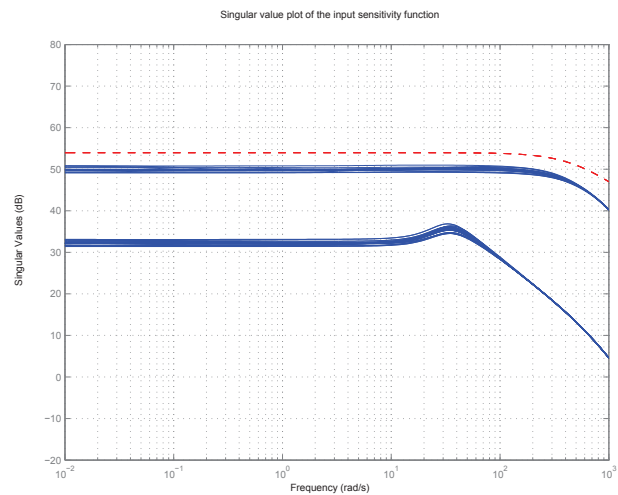
На фиг. 3 са показани сингулярните стойности на предавателната матрица на затворената система (от заданията към изходите) съвместно с честотните характеристики на желания модел. Вижда се, че тези характеристики съвпадат в диапазона до 10 rad/s, което осигурява желаното поведение на системата в достатъчно широка честотна лента.

На фиг. 4 и 5 са показани честотните характеристики на изходната и входната

чувствителност (с пунктир са дадени честотните характеристики на съответните тегловни функции). От фиг. 4 се вижда, че потискането на смущаващите въздействия на изхода на системата е около 35 dB, т.е., над 50 пъти.



Фиг. 4. Честотни характеристики на изходната чувствителност



Фиг. 5. Честотни характеристики на входната чувствителност

#### 5. Синтез на регулатор на пространственото положение

При условие, че ъгловото положение на четирироторния хеликоптер е стабилизирано, преместването му в пространството може да се осъществи с три ПД регулатора, изходите на които се добавят към изходите на регулатора за стабилизация. ПД регулаторите се проектират на базата на апроксимирано описание на движението на центъра на масата. Приема се, че ъглите  $\phi$  и  $\theta$  са малки и за линейните скорости  $V_x, V_y, V_z, [m/s]$  в земна координатна система се получава апроксимираната зависимост

$$\begin{aligned} V_x &= w(\cos\phi \cos\psi)\theta \\ V_y &= -w(\cos\psi)\phi \\ V_z &= w\cos\phi\cos\theta \end{aligned} \quad (17)$$

където

$$\dot{w} = \frac{Z}{m} + g\cos\phi \cos\theta \quad (18)$$

а  $g[m/s^2]$  е земното ускорение. Пренебрегвайки някои от силите по оста  $Z$ , които са малки в сравнение с теглителните сили на роторите  $T [N]$  се получава

$$Z \approx -T. \quad (19)$$

Изразите (19) и (18) показват, че желаната позиция по осите  $X, Y, Z$  може да се постигне чрез промяна на ъгъла на атака  $\theta$  и на ъгъла на крена  $\phi$ . Уравнения (17) дават идеята към входовете на двигателите да се приложат и изходите на ПД регулаторите

$$\begin{aligned} U_z &= [K_{p1}(z_{ref} - z) - K_{d1}V_z] / (\cos\phi \cos\theta) \\ U_x &= [K_{p2}(x_{ref} - x) - K_{d2}V_x] / (\cos\phi \cos\psi) \\ U_y &= [K_{p3}(y_{ref} - y) - K_{d3}V_y] / \cos\psi \end{aligned} \quad (20)$$

където  $x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}$  са заданията за позицията на хеликоптера,  $K_{p1}, K_{p2}, K_{p3}$  - коефициентите на пропорционалност и  $K_{d1}, K_{d2}, K_{d3}$  - коефициентите на диференциране. Чрез знаменателите в (20) приблизително се декуплират ъгловото и надлъжното движения на хеликоптера, което позволява независимо да се управлява позицията по  $X, Y, Z$  осите. Управленията по позиция  $U_z, U_x, U_y$  се добавят към съответните изходи на  $\mu$ -регулатора. Параметрите на регулаторите (20) в случая са избрани като

$$\begin{aligned} K_{p1} &= -0.4, K_{p2} = -0.1, K_{p3} = 0.3 \\ K_{d1} &= -0.3, K_{d2} = -0.5, K_{d3} = 0.6 \end{aligned}$$

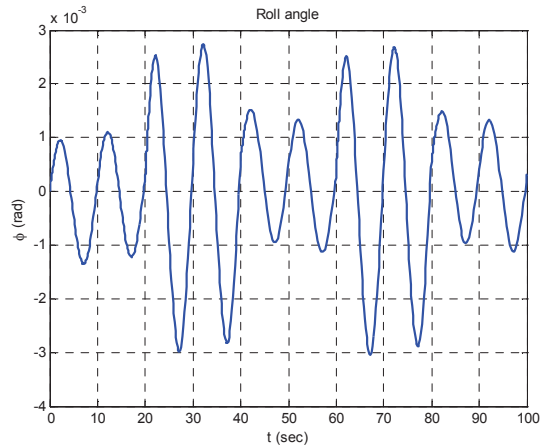
Знаците на коефициентите са избрани така, че да се осигури устойчивост на системата.

### 6. Симулиране на нелинейната система

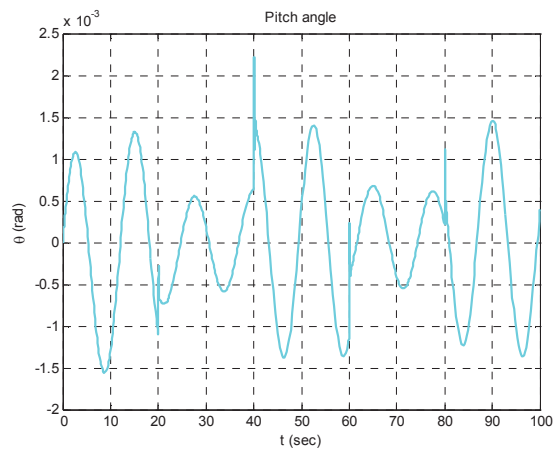
Преходните процеси на нелинейната затворена система с  $\mu$ -управляващо устройство се получават използвайки Simulink<sup>TM</sup> – модела на обекта. Смущаващите въздействия по осите  $X$  и  $Y$  са избрани като

$$M_{dx} = 0.1 \sin(0.2pt), M_{dy} = 0.05 \sin(0.16pt)$$

Смущаващият момент  $M_{dz}$  по оста  $Z$  е избран като поредица от алтернативни по знак стъпаловидни въздействия с амплитуда 0.08 Nm и честота 0.025 Hz. Управляващите въздействия, получени с линейното управляващо устройство, се добавят към стойностите на тези въздействия, определени за установения режим на работа (режима на висене). Уравненията се интегрират с метода за интегриране на „твърди“ диференциални уравнения ode23tb с променлива стъпка на интегриране.



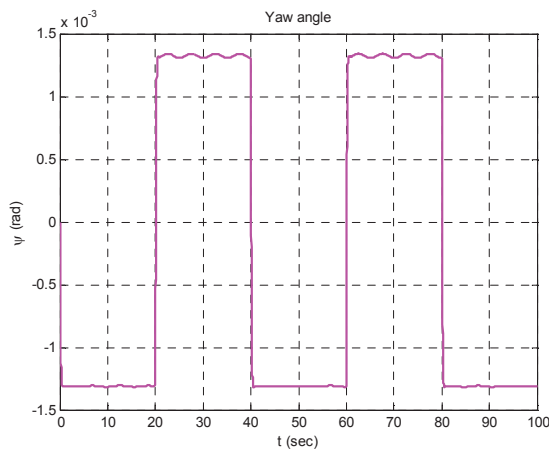
Фиг. 6. Изменение на ъгъла на крена



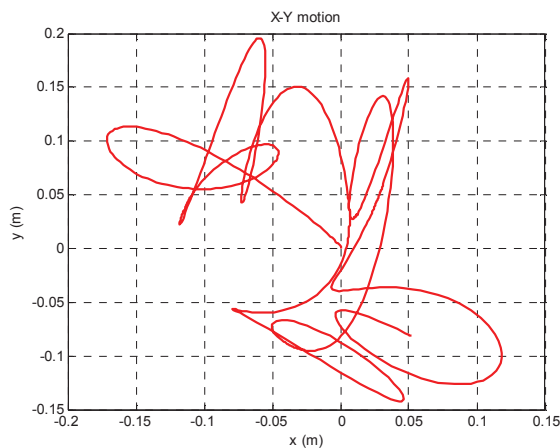
Фиг. 7. Изменение на ъгъла на тангажа

На фиг. 6, 7 и 8 са показани съответно ъглите на крена, тангажа и лъкатушенето при нулеви задания за положението в хоризонталната равнина и височина на полета 5 m. Вижда се, че в съответствие с честотните характеристики, показани на фиг. 4, смущаващите въздействия се потискат повече от 50 пъти на изхода на системата. С това се илюстрира високото качество на процесите в затворената система. Съществено е да се отбележи, че тези преходни процеси се получават при управляващи въздействия, които не надхвърлят зададените ограничения.





Фиг. 8. Изменение на ъгъла на лъкатушене



Фиг. 9. Траектория на движение на хеликоптера в хоризонталната равнина

На фиг. 9 е показана траекторията на движение на хеликоптера в хоризонталната равнина под действието на указаните смущаващи въздействия. Отклоненията от зададената точка на висене са под 0.2 m което потвърждава добрата работа на системата за управление.

### 6. Заключение

В работата са представени резултатите от синтеза на робастен регулатор за управление на четирироторен хеликоптер. Симулирането на нелинейната затворена система с този регулатор показва, че той успешно потиска смущаващите въздействия и осигурява приемливо качество на преходните процеси. Следващата задача е вграждането в микроконтролер и изпълнението в реално време на получения закон за управление.

**Благодарност.** Изследванията, представени в статията, са финансирани по докторантски договор № 121пд0085-08 с НИС при Технически университет – София. Авторите благодарят на рецензента за направените бележки, които помогнаха за подобряване на текста.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Boubdallah, S., Siegwart R. Design and control of a miniature quadrotor. In: Valavanis, K.P. (Ed.): Advances in Unmanned Aerial Vehicles, pp. 171-210. Springer, 2007.
2. Kim, J., Kang, M.-S., Park, S. Accurate modeling and robust hovering control for a quadrotor VTOL aircraft. J Intell Robot Syst, Vol. 57, 2010, 9-26.
3. Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., Nakazawa, D. Autonomous Flying Robots. Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles. Springer, Tokyo, 2010.
4. Gu, D.-W., Petkov, P.Hr., Konstantinov, M.M. Robust Control Design with MATLAB™. Springer-Verlag, London, 2005.
5. Shakev, N.G., Topalov, A.V., Kaynak, O., Shiev, K.B. Comparative results on stabilization of the quad-rotor rotorcraft using bounded feedback controllers. J Intell Robot Syst, Vol. 65, 2012, 389-408.
6. Yu, Y., Ding, X. A quadrotor test bench for six degree of freedom flight. J. Intell Robot Syst, Vol. 68, 2012, 323-338.

Department of Systems and Control  
Technical University of Sofia,  
8 Kliment Ohridski Blvd.  
1000 Sofia  
BULGARIA  
E-mail: [h\\_gendov@tu-sofia.bg](mailto:h_gendov@tu-sofia.bg)  
E-mail: [php@tu-sofia.bg](mailto:php@tu-sofia.bg)

Постъпила на 12.03.2013 г.