СВОЙСТВА НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА СТЕЙСИ И ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С МОМЕНТИ НА ИМПУЛС, ИМАЩИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА СТЕЙСИ

АТАКАН САЛИМОВ*, ПЕТЪР КОПАНОВ**, ОГНЯН НАКОВ*, БЮЛБЮЛ ЗЮЛЯМОВА*, АДНАН РЕДЖЕБОВ*

**Технически университет София, Факултет по компютърни системи и технологии*

***Пловдивски университет, Факултет по математика и информатика*

atakan@abv.bg, pkopanov@yahoo.com, nakov@tu-sofia.bg, bulbul@abv.bg,adnan.redzheb@gmail.com

Резюме: *Диференциалните уравнения с импулси в случайни моменти описват сложни реални системи, еволюиращи по непрекъснат начин и подложени на внезапни резки външни въздействия в случайни моменти. Резките внезапни въздействия върху различни области, каквито са въздействията на епидемията от COVID-19 върху икономиката и обществото биха могли да бъдат описани с такива уравнения. Основен въпрос в такива ситуации е доколко такава система остава устойчива. В предишни работи са изследвани проблемите за устойчивост на моделите на такива системи, описвани чрез диференциалнби уравнения с импулси в случайни моменти, имащи експоненциално или гама разпределение. В тази работа показваме как изследването на подобна система, в която случайните импулси имат много по-общо разпределение, известно като разпределение на Стейси, може да бъде сведено до предишното изследване за гама разпределени импулси.*

Ключови думи: *импулсни диференциални уравнения, случайни моменти на импулси, разпределение на Стейси*

STACY DISTRIBUTION AND IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STACY DISTRIBUTED MOMENTS OF IMPULSES

Atakan Salimov*, Peter Kopanov**, Ognian Nakov*, Byulbyul Zyulyamova*, Adnan Redzheb*

**Technical University of Sofia, Faculty of Computer systems and Technologies*

***Plovdiv University, Faculty of Mathematics and Informatics*

atakan@abv.bg, pkopanov@yahoo.com, nakov@tu-sofia.bg, bulbul@abv.bg,adnan.redzheb@gmail.com

Abstract: *Differential equations with impulses at random moments describe complex real systems, evolving in a continuous way and subjected to sudden sharp external influences at random moments. The abrupt sudden effects on various areas, such as the effects of the COVID19 epidemic on the economy and society, could be described* *by such equations. A key question in such situations is the extent to which such a system remains sustainable. In previous works we have studied the problems of stability of the models of such systems, described by differential equations with impulses at random moments, having exponential or gamma distribution. In this work we show how the study of such a system, in which random impulses have a more general distribution, known as Stacey distribution, can be reduced to the previous study of differential equations with gamma distributed impulses.*

Some basic properties of the Stacy distribution have been found and proven, which is a generalized Gamma distribution in which two of the parameters can also take negative values. The common properties found are specified in 2 theorems. It is shown by changing the variables how the problem of stability of differential equations with random impulses with a distribution of Stacy can be reduced to a similar problem of differential equations with random impulses with a gamma distribution already solved in previous works.

Key words: impulsive differential equations, random moments of impulses, Stacy distribution.

1. Цели на изследването.

Изследването на свойствата на това не особено известно като име разпределение (много по-известен е негов частен случай, използван под името обобщено гама разпределение) бе инициирано от няколко предишни съвместни работи на авторите (виж [2]-[7]), в които бяха използвани някои специфични свойства на експоненциалното разпеделение, разпределението на Ерланг и гама-разпределението.

В процеса на работа в тези предишни изследвания естествено възникна въпросът за обобщаване на разпределенията на случайните моменти на импулс, разглеждани там, така че те да обхващат като частни случаи случайните моменти с експоненциално разпределение, разпределението на Ерланг като сума на експоненциални разпределения и гама разпределение като обобщение на разпределението на Ерланг и при това основните твърдения и изводи в работите да останат в сила.

При първоначалните опити за обобщаване на ситуацията със случайни моменти с произволни разпределения стана ясно че се появяват редица специфични особености, които възпрепятстват коректното пренасяне на разсъжденията в абстрактен общ случай. Оказа се че в обща ситуация фактически могат да се построят контрапримери като конструкции за практически всевъзможни ситуации. Ако пък се наложат допълнителни условия, елиминиращи тези ситуации, условията, при които твърденията евентуално остават в сила, стават изключително тромави и неестествени.

Естествено възникна въпросът: възможно ли е коректно да се обобщят разпределенията на случайните моменти на импулсите, разглеждани в предишните работи, като от една страна се запази по същество схемата на разсъждения и доказателства, използвана досега и съответно тези обобщени разпределения да включват като частни случаи разгледаните досега случаи на експоненциално разпределение, разпределението на Ерланг и гама-разпределението, а също така да включват и нови разпределения, които да бъдат важни от теоретична и/или практическа гледна точка.

Оказа се че има подходящо обобщение на гама-разпределението, което позволява да бъдат повторени схемите от предишните изследвания и в същото време то да е достатъчно смислено и важно от практическа гледна точка. Това е т. нар. Разпределение на Стейси, понякога неправилно наричано обобщено гама разпределение. Всъщност обобщеното гама разпределение е частен случай на разпределението на Стейси. Това разпределение бе намерено и изследвано след проучване на специализирана литература (виж [8]-[38]).

2. Основни свойства на разпределението на Стейси.

В тази част разглеждаме дефиницията, основните свойства и някои допълнителни свойства на разпределението на Стейси.

Дефиниция. Казваме че случайната величина X има разпределение на Стейси с параметри a, b, c, (a.c>0, b>0), и ще го означаваме съкратено X ~ Stacy (a,b,c), (a.c>0, b>0), ако X е положителна и има плътност на разпределение (за x>0)

$f_X(x) = M.x^{a-1}.e^{-b.x^c}$.

Това разпределение е въведено за пръв път от Стейси в работа [1] от 1961 г.

Свойство 1. При отрицателни a<0, c<0 понякога това разпределение се нарича *обобщено обратно гама разпределение*, и се означава с X ~ GIG(a,b,c), а при a>0, c>0 се нарича *обобщено гама разпределение*, и се означава с X ~ GG(a,b,c).

Свойство 2. При отрицателни a<0, c<0, не съществуват моменти $E(X^k)$ при к+a-1>0, тъй като интегралът с който те се пресмятат става разходящ:

x^{a+k-1} става растяща към безкрайност, а $e^{-b.x^c} > e^{-b}$ при x>1.

При положителни a>0, c>0 всички моменти на разпределението съществуват.

Свойство 3. При полагане $y=b.x^c$ по същество различните свойства и изводи се свеждат до аналогични такива за гама разпределение на случайна величина със съответни уговорки и проверки.

За Разпределението на Стейси са в сила и следните 2 Теореми, в които са дадени нетривиални негови свойства.

Теорема 1. Нека X ~ Stacy (a,b,c), r≠0. Тогава X^r ~ Stacy $\left(\frac{a}{r}, b, \frac{c}{r}\right)$.

Доказателство. Нека У= X^r. Тогава

Нека У= X^r. Then

1) r>0 $F_Y(x) = P(Y<x)=P(X<x^{\frac{1}{r}})=F_X(x^{\frac{1}{r}})$. Следователно

$f_Y(x)=F'_Y(x)=F'_X(x^{\frac{1}{r}})=f_X(x^{\frac{1}{r}}).(x^{\frac{1}{r}})'=$

$\frac{1}{r}.x^{\frac{1}{r}-1}.M.x^{\frac{1}{r}.(a-1)}.e^{-b.\left(x^{\frac{1}{r}}\right)^c}=$

$=\frac{M}{r}.x^{\frac{a}{r}-1}.e^{-b.x^{\frac{c}{r}}}$.

2) r<0 $F_Y(x) = P(Y<x)=P(X>x^{\frac{1}{r}})=1-F_X(x^{\frac{1}{r}})$. Следователно

$f_Y(x)=-F'_Y(x)=-F'_X(x^{\frac{1}{r}})=-f_X(x^{\frac{1}{r}}).(x^{\frac{1}{r}})'=-$

$\frac{1}{r}.x^{\frac{1}{r}-1}.M.x^{\frac{1}{r}.(a-1)}.e^{-b.\left(x^{\frac{1}{r}}\right)^c}=$

$=-\frac{M}{r}.x^{\frac{a}{r}-1}.e^{-b.x^{\frac{c}{r}}}$.

Тази теорема показва, че произволна ненулева степен на разпределение на Стейси е разпределение на Стейси със съответните параметри, зададени в условието на теоремата. Това свойство е в основата на появата на това разпределение в много приложения във физиката, медицината и други естествени науки (виж например [8]-[38]).

Теорема 2. Нека $\{X_i\}$, i=1,2,…,n е редица от независими случайни величини и X_i ~ Stacy (a_i,b,c). Тогава за случайната величина $Y=(X_1^c+X_2^c+\cdots.+X_n^c)^{\frac{1}{c}}$ имаме Y ~ Stacy $(a_1+a_2+\ldots+a_n,b,c)$.

Доказателство. От Теорема 1 имаме X_i^c~ Stacy $\left(\frac{a}{c}, b, 1\right)$. Но Stacy (a,b,1) ~ Γ(a,b) – това е стандартното гама разпределение с параметри (a, b). Но за него е добре известно (доказва се с помощта на характеристични функции например) свойството, че ако X ~ $\Gamma(a_1,b)$, $Y\sim\Gamma(a_2,b)$,тогава $X+Y\sim\Gamma(a_1+a_2,b)$. Следователно $X_1^c+X_2^c+\cdots.+X_n^c$ ~ $\Gamma((a_1+a_2+\ldots+a_n)/c,b)$ ~ Stacy $((a_1+a_2+\ldots+a_n)/c,b,1)$. Отново прилагаме

Теорема 1 само че за степен r=$\frac{1}{c}$ и получаваме твърдението в теоремата.

Теорема 1 и Теорема 2 всъщност показват защо разпределението на Стейси е важно за редица приложения на практика и защо негови частни случаи се получават в различни приложения в реални ситуации: при преобразувания от съответните видове – повдигане на произволна степен и сума от степени от специален тип – получаваме отново разпределение от същия общ вид, т.е. общият вид на разпределението се запазва.

3. Импулсни диференциални уравнения със случайни моменти на импулсите, имащи разпределение на Стейси.

Нека имаме система от импулсни диференциални уравнения (виж [3]):

$x' = f(t, x(t))$, $t \in (T_k, T_{k+1}]$, k=0,1,2,…,

$x(T_k+0)=I_k(x(T_k-0))$, k=1,2,…

$x(T_0)=x_0$,

където x, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f:[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Решението на горното уравнение зависи не само от началното условие (T_0,x_0), но и от моментите на импулси Тк, к=1,2,3,... и тое ще го записваме като $x(t;T_0,x_0,\{T_k\})$. Предполагаме, че $x(t,T_0,x_0,\{T_k\}) = \lim_{t\to T_k-0} x(t;T_0,x_0,\{T_k\})$ за всяко к=1,2,...

В предишни статии (виж 3-7) подробно са изследвани решенията на горното уравнение в случаите, когато моментите на скок $\{T_k\}$ са реализации на случайна величина с разпределение на Ерланг или Гама разпределение.

Оказва се, че получените там резултати могат да се преформулират след прости преобразувания за много по-обща ситуация, когато моментите на скок $\{T_k\}$ са реализации на случайна величина с разпределение на Стейси.

Идеята е да се замени в диференциалните уравнения променливата t с нова променлива $u=t^c$ като по този начин разпределението на Стейси за импулсите се свежда до гама разпределение (за което вече имаме готови резултати в предишните статии).

При смяна на променливата за време $u=t^c$, $t=u^{1/c}$, $x(t)=x(u^{1/c})=y(u)$ ще получим следните нови зависимости:

$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dx(u^{1/c})}{du^{1/c}}=\frac{dy(u)}{du}.c.u^{1-1/c}=f(t, x(t))=f(u^{1/c}, x(u^{1/c})) \to$

$\frac{dy(u)}{du}=\frac{1}{c}.\,u^{-1+1/c}.f(u^{1/c},y(u))=g(u, y(u))$

т.е. получаваме нова система от диференциални уравнения

$y'(u)=g(u, y(u))$

(положили сме $\frac{1}{c}.\,u^{-1+1/c}.f(u^{1/c},y(u))=g(u, y(u))$)

Така по отношение на новата променлива „време“ $u=t^c$ случайните моменти на импулсите ще имат съгласно Теорема 1 разпределение Stacy $(a_k/c,b,1) \sim \Gamma(a_k/c,b)$.

Тогава за новата задача

$y'(u)=g(u, y(u))$

получаваме, че са в сила резултатите от предишните статии [3] и [6] когато са изпълнени съответните условия по отношение на „новата функция“

$g(u, y(u)) = \frac{1}{c}.\,u^{-1+1/c}.f(u^{1/c},y(u))$ и новата променлива „време“ $u= t^c$.

Разбира се при проверката за общите условия може да се окаже, че има особености. Например ясно е че ако c<0 и съответните $a_к$ също са отрицателни и тогава ходът на новото „време“ u е в обратна посока по отношение на t. Тези особености обаче не са съществени и ;есно се съобразява какво става в подобни случаи.

Същественият резултат е, че сведохме случая на задачата с разпределение на Стейси до случая на аналогична задача с Гама разпределение, който вече е решен.

4. Таблица с частни случаи.

В потвърждение на горните изводи за важността на разпределението на Стейси даваме таблица на редица известни разпределения, които всъщност се явяват частни случаи на разпределението на Стейси.

Тези разпределения имат имена, като в таблицата са запазени англоезичните имена, всички означени параметри на специалните разпределения приемат положителни стойности, знакът е допълнително означен, и всяко от тях има редица практически приложения, които са описани подробно в специализираната литература и няма да бъдат обсъждани тук.

Таблица 1. *Частни случаи на разпределението на Стейси*

име	**параметри**	**a=**	**b=**	**c =**
Chi distribution	k	k	½	2
Scaled chi	k, t^2	k	$k.t^2/2$	2
Inverse chi	k	-k	½	-2
Scaled inverse chi	k, t^2	-k	$k.t^2/2$	-2
Chi squared	k	k/2	½	1
Scaled chi-squared	k, t^2	k/2	$k.t^2/2$	1
Inverse chi-squared	k	-k/2	½	-1
Scaled inverse chi-sq	k, t^2	-k/2	$k.t^2/2$	-1
Exponential	λ	1	λ	1
Inverse exponential	λ	-1	λ	-1
Frechet	α	- α	1	-α
General. Frechet	n,α	-nα	n	-α
Gamma	α,β	α	β	1
Erlang	k, λ	k	λ	1
Inverse gamma	α,β	- α	β	-1
Fisher-Tippett	c,β	β	c	β
Generalized F.-T.	n, c,β	n.β	n.c	β
Generalized gamma	a,d,p	d	a^{-p}	p
Half-normal	σ^2	1	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2
Levy	c	-½	c/2	-1
Maxwell	σ	3	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2
Nakagami	m,Ω	2m	m/Ω	2
Pearson type V	α,β	- α	β	-1
Pseudo-Weibull	β, θ	β+1	$\theta^{-\beta}$	β
Rayleigh	σ	2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2
Inversed Rayleigh	σ	-2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	-2
Standard gamma	α	α	1	1
Weibull	k, λ	k	λ^{-k}	k
Generalized W.	n, ,k, λ	n.k	$n.\lambda^{-k}$	k
Wilson-Hilferty	α,β	3.α	β	3

Изброените в таблицата частни случаи покриват огромна част от ситуациите, които възникват на практика. Тъй като представляват частни случаи на разпределението на Стейси, всички общи твърдения (от типа на Теореми 1 и 2 например) за това разпределение ще могат да се използват (със съответни уговорки и уточнения където е необходимо) за тези частни случаи.

Заключение. Свойствата на разпределението на Стейси позволяват след прилагане на техники, подобни на тези в доказателствата Теорема 1 и Теорема 2 резултатите от предините работи [2]-[7] да бъдат обобщени за случай на случайни величини с разпределение на Стейси. Изброените в таблицата частни случаи пък показват важността на тези евентуални обобщения за голям брой практически приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stacy, E.W. (1962). A generalization of the gamma distribution. Annals of Mathematical Statistics 33, 1187-1192.

2. R. Agarwal, S. Hristova, D. O’Regan, P. Kopanov, P-MOMENT EXPONENTIAL STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM NONINSTANTANEOUS IMPULSES AND THE ERLANG DISTRIBUTION, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 109 No. 1 2016, 9-28, ISSN: 1311-8080 (printed version); ISSN: 1314-3395 (on-line version), url: http://www.ijpam.eu, doi: 10.12732/ijpam.v109i1.3

3. R. Agarwal, S. Hristova, D. O’Regan, P. Kopanov, Impulsive differential equations with Gamma distributed moments of impulses and p-moment exponential stability, Acta Mathematica Scientia, Issue 4, Vol.37, 2017

4. R. P. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, P. Kopanov. p-Moment Exponential Stability of Differential Equations with Random Impulses and the Erlang Distribution. Mem. Differential Equations Math. Phys. 70 (2017), pp. 99-106.

5. Ravi Agarwal, Snezhana Hristova, Donal O’Regan and Peter Kopanov. Stability Analysis of Cohen–Grossberg Neural Networks with Random Impulses, Mathematics 2018, 6, 144; doi:10.3390/math6090144

6. Ravi Agarwal, Snezhana Hristova, Donal O’Regan, and Peter Kopanov Differential equations with random Gamma distributed moments of non-instantaneous impulses and p-moment exponential stability, Demonstratio Mathematica, Volume 51, Issue 1, Pages 151–170, ISSN (Online) 2391-4661

7. SNEZHANA HRISTOVA AND PETER KOPANOV. STABILITY OF NEURAL NETWORKS WITH RANDOM IMPULSES, Dynamic Systems and Applications, 27, No. 4 (2018), 791-801 ISSN: 1056-2176

8. Sadraque E.F. Lucena, Ana Herm´ınia A. Silva, Gauss M. Cordeiro, The Transmuted Generalized Gamma Distribution: Properties and Application, Journal of Data Science 13(2015), 409-420

9. Bhaswati Mukherjee & Ashutosh Gupta & S. K. Upadhyay, A Bayesian study for the comparison of generalized gamma model with its components, Sankhya B (November 2010) 72:154–174.

10. Saralees Nadarajaha, Arjun K. Gupta, A generalized gamma distribution with application to drought data, Mathematics and Computers in Simulation 74 (2007) 1–7

11. Gonzalo Vegas-Sanchez-Ferrero, Santiago Aja-Fernandez, Cesar Palencia, and Marcos Martin-Fernandez, A Generalized Gamma Mixture Model for Ultrasonic Tissue Characterization, Computational and Mathematical Methods in Medicine Volume 2012, Article ID 481923, 25 pages

12. Pedro L. Ramos and Francisco Louzada, A Modified Reference Prior for the Generalized Gamma Distribution, arXiv:1412.5843v1 [stat.ME] 18 Dec 2014

13. Ronaldo V. da Silva1 §, Frank Gomes-Silva2, Manoel Wallace A. Ramos3, Gauss M. Cordeiro, A NEW EXTENDED GAMMA GENERALIZED MODEL, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 100 No. 2 2015, 309-335

ISSN: 1311-8080 (printed version); ISSN: 1314-3395 (on-line version)

14. Satsayamon Suksaengrakcharoen and Winai Bodhisuwan, A NEW FAMILY OF GENERALIZED GAMMA DISTRIBUTION AND ITS APPLICATION, Journal of Mathematics and Statistics 10 (2): 211-220, 2014 ISSN: 1549-3644

15. Viorel Gh. VODĂ, A NEW GENERALIZATION OF RAYLEIGH DISTRIBUTION, e-journal “Reliability: Theory& Applications” No 2 (Vol.2)

16. M. I. Khan, M.A.R. Khan, A Note on Characterization of Generalized Gamma Distribution by Doubly Truncated Mean Function, International Journal of Statistika and Mathematika, ISSN: 2277- 2790 E-ISSN: 2249-8605, Volume 10, Issue 3, 2014 pp 70-72

17. B. LAGOS ALVAREZ, G. FERREIRA and M. VALENZUELA HUBE, A proposed reparametrization of gamma distribution for the analysis of data of rainfall-runoff driven pollution, Proyecciones Journal of Mathematics Vol. 30, No 3, pp. 415-439, December 2011

18. Gulshan Ara Majid , Prof. Dr. Ahmad Saeed Akhtar & Maqsood Ahmad, Ascertainment of Seismic Frequency Analysis by New Weighted Stacy Distribution, Imperial Journal of Interdisciplinary Research (IJIR) Vol-2, Issue-5, 2016

19. Kaisar Ahmad, S.P. Ahmad1, A. Ahmed and J.A. Reshi, Bayesian Analysis of Generalized Gamma Distribution using R Software, J. Stat. Appl. Pro. 4, No. 2, 323-335 (2015)

20. Aurelien Schutz, Lionel Bombrun, Yannick Berthoumieu, Mohamed Najim, Centroid-based texture classification using the generalized Gamma distribution, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00878744 Submitted on 30 Oct 2013

21. Reig, J.; Rubio Arjona, L. (2013). Estimation of the composite fast fading and shadowing distribution using the log-moments in wireless communications. IEEE Transactions on Wireless Communications. 12(8):3672-3681.

22. Stephen Walker and Pietro Muliere, BETA-STACY PROCESSES AND A GENERALIZATION OF THE POLYA-URN SCHEME, The Annals of Statistics 1997, Vol. 25, No. 4, 1762-1780

23. Bachioua Lahcene, Extended Generalized Gamma Function and Same Its Applications, IAAST; Vol 4 [3] September 2013: 16-30

24. Willard G. Manning Anirban Basu John Mullahy, GENERALIZED MODELING APPROACHES TO RISK ADJUSTMENT OF SKEWED OUTCOMES DATA, NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH, Technical Working Paper 293

25. Suriya Jabeen and Tariq R Jan, Information Measures Of Size Biased Generalized Gamma Distribution, International Journal of Scientific Engineering and Applied Science (IJSEAS) - Volume-1, Issue-3, June 2015

26. MARIA DO CARMO SOARES DE LIMA, MATHEMATICAL PROPERTIES OF SOME GENERALIZED GAMMA MODELS, Doctoral thesis, FEDERAL UNIVERSITY OF PERNAMBUCO, Recife 2015

27. Vasile Mihesan, On a general class of modified gamma approximating operators, General Mathematics Vol. 18, No. 1 (2010), 71-80

28. K. Zografos, N. Balakrishnan, On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference, Statistical Methodology 6 (2009) 344–362

29. A.Ahmed1, K.A. Mir2 , J. A. Reshi, On new method of estimation of parameters of Size-biased Generalized Gamma Distribution and its Structural properties, IOSR Journal of Mathematics, Volume 5, Issue 2 (Jan. - Feb. 2013), PP 34-40

30. Ping-Huang Huang and Tea-Yuan Hwang, ON NEW MOMENT ESTIMATION OF PARAMETERS OF THE GENERALIZED GAMMA DISTRIBUTION USING IT’S CHARACTERIZATION, TAIWANESE

JOURNAL OF MATHEMATICS Vol. 10, No. 4, pp. 1083-1093, June 2006[31]. M. Parsa, G.R. Motashami Borzadaran, and A.H. Rezaei Roknabadi, On the change points of mean residual life and failure rate functions for some generalized gamma type distributions, Int. J. Metrol. Qual. Eng. 5, 102 (2014)

32. Eugene C. Morgan, Matthew Lackner, Richard M. Vogel, Laurie G. Baise, Probability distributions for offshore wind speeds, Energy Conversion and Management 52 (2011) 15–26

33. Morteza Khodabina,1, Alireza Ahmadabadi, Some properties of generalized gamma distribution, Mathematical Sciences Vol. 4, No. 1 (2010) 9-28

34. Fan, Tsai-Hung, Chen, Yi-Chun, Statistical Inference on Constant Stress Accelerated Life Tests Under Generalized Gamma Lifetime Distributions, Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress, 2011, Dublin (Session CPS040)

35. Hager, Harold Walter, "Statistical inferences for the generalized gamma distribution" (1969). Doctoral Dissertations. 2275

36. I. M. Abd El-Fatah, M. E. Mead and H. E. Semary, The Applications of the Modified Generalized Gamma Distribution in Inventory Control, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, no. 35, 1699 – 1712

37. Gauss M. Cordeiro, Maria do Carmo S. Lima, Antonio E. Gomes, Cibele Q. da-Silva and Edwin M. M. Ortega, The gamma extended Weibull distribution , Journal of Statistical Distributions and Applications (2016) 3:7

38. Ohakwe J. , Akpanta A. and Dike O A. , Unit Mean and Constant Variance of the Generalized Gamma Distribution after Square Root Transformation in Statistical modeling , Mathematical Theory and Modeling , Vol.2, No.12, 2012