

## ОТНОСНО КИНЕМАТИКАТА НА РЕГИОНАЛНИ ПОДСИСТЕМИ НА ПРОМИШЛЕНИ РОБОТИ С ТРИ СТЕПЕНИ НА СВОБОДА

Габриела Михайлова,  
[gabi\\_tennis@abv.bg](mailto:gabi_tennis@abv.bg),

Мина Цонева  
[mina\\_todorova@abv.bg](mailto:mina_todorova@abv.bg)

ТУ – София, ИПФ – Сливен,  
гр. Сливен, бул. “Бургаско шосе” №59

### Резюме

*В настоящия труд са обобщени кинематичните модели на основните регионални подсистеми на промишлени роботи с три степени на свобода, създадени на база на трансформацията на Денавид и Хартенберг. Представени са принципни блокови структури за числено решаване на правата и обратната задача на кинематиката на тези механизми в средата на програмен продукт Matlab.*

### Ключови думи

*Промислен робот, регионална подсистема, Stanford Manipulator, кинематичен модел, Ойлерови ъгли, трансформация на Денавид и Хартенберг*

### Въведение

В съвременната машиностроителна индустрия широко навлезе използването на промишлени роботи (ПР). Тези машини извършват технологични и манипулационни операции с по-голяма точност и надеждност от хората. Благодарение на многообразието от програмни CAD/CAM продукти програмирането на роботите е лесно и интуитивно.

Структурно промишлените роботи са изградени от

- *Глобална подсистема*, включваща носещата конструкция на робота;
- *Регионална подсистема (манипулатор)*, предназначена да изпълнява движенията за изменение на позицията на работния орган в пространството;
- *Локална подсистема*, предназначена да изпълнява движенията за изменение на ориентацията на работния орган в пространството;
- *Подсистема за задвижване*, за привеждане в движение на отделните звена на промишления робот според командите на системата за управление;
- *Подсистема за управление*, включваща устройствата, управляващи силовите задвижвания по зададена управляваща програма и данни от информационната подсистема.

*Обект на настоящата разработка са основните конфигурации на регионалните подсистеми на промишлените роботи. Изключително важен етап при проектирането на механизмите, изпълняващи регионалните движения е кинематичния анализ. Основните задачи на кинематиката са свързани с определянето на аналитични координати по зададени обобщени координати – *права задача на кинематиката* (ПЗК) и обратно - определяне на обобщените координати по зададени аналитични координати – *обратна задача на кинематиката* (ОЗК). ПЗК се решава при реализиране на управлението на промишления робот, а ОЗК моделира управлението на робота с цел постигане на зададени траектории на точки от изпълнителното звено [2, 3].*

*Целта на работата е да бъдат обобщени кинематичните модели на основните регионални подсистеми на промишлени роботи с три степени на свобода, създадени на база на трансформацията на Денавид и Хартенберг, които да бъдат реализирани числено в средата на програмен продукт Matlab.*

### Теоретична постановка

В зависимост от вида на кинематичните двоци (КД) и от разположението на осите им различаваме следните основни конфигурации на манипулаторите [1] (фиг. 1):

- Декартова структура с три трансляционни двоици RPP и призматично достижимо пространство (фиг. 1.а);

- Структура с цилиндрични координати с една ротационна и две трансляционни двоици RPP и цилиндрично достижимо пространство (фиг. 1.б);

- Структура със сферични координати с две ротационни КД с пресичащи се оси и една трансляционна двоица RRP описва сферично достижимо пространство (фиг. 1.в);

- Структура тип „Скара“ с две ротационни КД с успоредни оси и една трансляционна двоица RRP (фиг. 1.г);

- Антропоморфна структура с три ротационни двоици RRR, наподобяваща човешка ръка (фиг. 1.д).

Като цяло това са пространствени механизми с отворена кинематична верига, съставена от четири звена: стойка и три подвижни звена.

Положението на изпълнителното звено 4 относно избрана неподвижна координатна система се определя чрез матрицата  $T_{14}$  за трансформиране на координатна система, свързана със звено 4, в координатната система свързана със стойката 1. Тя се получава от произведението на матриците на трансформация на координатните системи на всички съседни звена, а именно:

$$(1) \quad T_{14} = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34}$$

където:

$$T_{i-1,i} = \begin{vmatrix} c\psi_i c\varphi_i - s\psi_i s\varphi_i c\theta_i & -c\psi_i s\varphi_i - s\psi_i c\varphi_i c\theta_i & s\psi_i s\theta_i & a_{i-1} \\ s\psi_i c\varphi_i + c\psi_i s\varphi_i c\theta_i & -s\psi_i s\varphi_i + c\psi_i c\varphi_i c\theta_i & -c\psi_i s\theta_i & b_{i-1} \\ s\varphi_i s\theta_i & c\varphi_i s\theta_i & c\theta_i & c_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\theta_i, \psi_i, \varphi_i$  са Ойлеровите ъгли за звеното  $i$  с координатна система  $O_i x_i y_i z_i$  относно предходното звено  $i-1$ . За записване на тригонометричните функции са използвани съкращенията:  $\sin = s, \cos = c$ ;

$a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}$  са координатите на центъра  $O_i$  спрямо координатната система  $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ .

При въвеждане на собствените за звената координатни системи е необходимо да се спазят условията на Денавид и Хартенберг:

Положението на произволна точка М от изпълнителното звено относно неподвижната координатна система  $Oxyz$  се определя от радиус-вектора  $\vec{r}_M(x_M, y_M, z_M)$ , за който е в сила зависимостта:

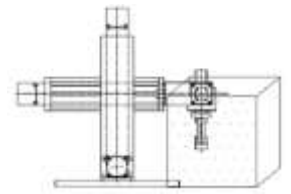
$$(2) \quad r_M = T_{14} \rho_{M4}$$

където:

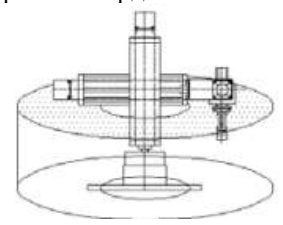
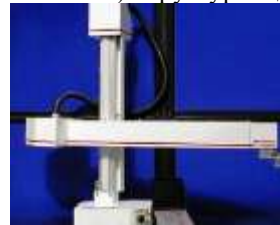
-  $r_M$  е матрица стълб от вида  $[x_M; y_M; z_M; 1]$ , тук  $x_M, y_M$  и  $z_M$  са координатите на т.М относно неподвижната координатна система  $Oxyz$ ;

-  $\rho_{M4}$  е матрица стълб от вида  $[x_{M4}; y_{M4}; z_{M4}; 1]$ , тук  $x_{M4}, y_{M4}$  и  $z_{M4}$  са хомогенните (полярни) координати на т.М от изпълнителното звено относно собствената му подвижната координатна система. Това са константни величини.

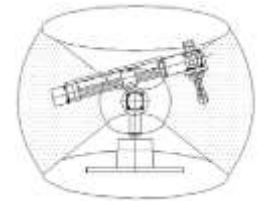
Матричното уравнение (2) е основно уравнение на кинематиката на механизма.



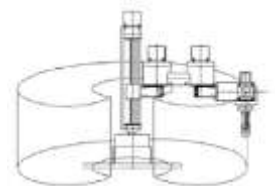
а) Структура с декартови координати



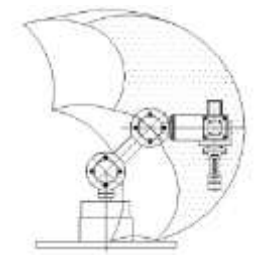
б) Структура с цилиндрични координати



в) Структура със сферични координати



г) Структура тип „Скара“



д) Антропоморфна структура

Фиг. 1. Основни конфигурации на регионални подсистеми на ПР (манипулатори) с 3 СС

Скоростта на т.М се определя в резултат на диференциране спрямо времето на (2)

$$(3) \quad V_M = \dot{r}_M = \dot{T}_{14} \rho_{M4}$$

където:  $V_M$  е матрица стълб от вида  $[\dot{x}_M; \dot{y}_M; \dot{z}_M; 1]$ , тук  $\dot{x}_M$ ,  $\dot{y}_M$  и  $\dot{z}_M$  са проекциите на скоростта на т.М относно неподвижната координатна система  $Oxyz$ ;

След диференциране на (3) спрямо времето се получава ускорението на т. М, а именно

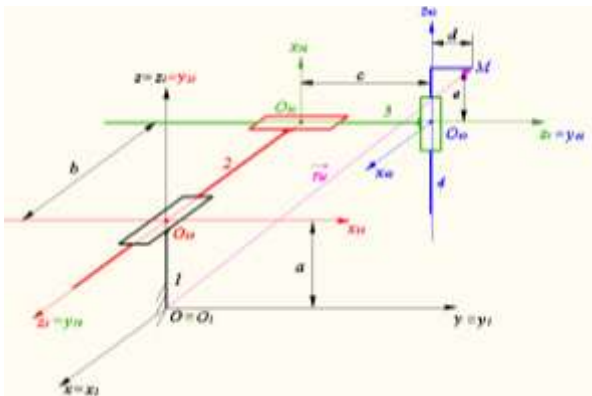
$$(4) \quad a_M = \ddot{r}_M = \ddot{T}_{14} \rho_{M4}$$

където:  $a_M$  е матрица стълб от вида  $[\ddot{x}_M; \ddot{y}_M; \ddot{z}_M; 1]$ , тук  $\ddot{x}_M$ ,  $\ddot{y}_M$  и  $\ddot{z}_M$  са проекциите на ускорението на т.М относно неподвижната координатна система  $Oxyz$ .

### Кинематичните модели

#### Декартова структура

На фиг. 2 е построена кинематичната схема на механизма в начално положение. Въведена е реперната координатна система, която съвпада със собствената координатна система на стойката 1. Към всяко от подвижните звена е въведена собствена, подвижна координатна система  $O_i x_i y_i z_i$  ( $i=2; 3; 4$ ). При въвеждане на осите са спазени условията на Денавид и Харгенберг. Конструкционните размери са означени с  $a, b, c$  и  $d$ .



Фиг. 2. Декартова структура

За радиус-вектора на произволна точка М от изпълнителното звено относно неподвижната координатна система  $Oxyz$  се получава:

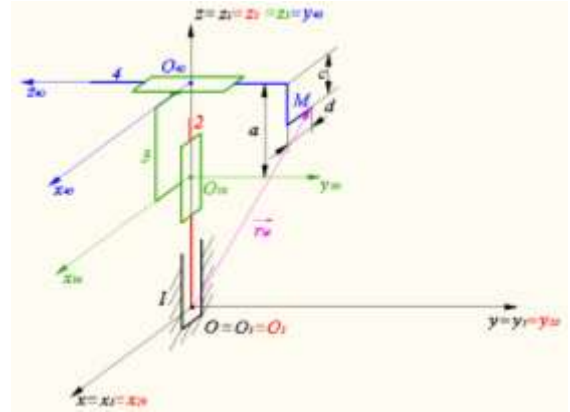
$$(5) \quad r_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & f_1(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & f_2(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

където:  $f_i(t)$  са обобщените координати - линейно преместване на звена  $i+1$  спрямо  $i$ .

#### Структура с цилиндрични координати

На фиг. 3 е показана кинематичната схема на механизма със съответните координатни

системи. Конструкционните размери са означени с  $a, b, c$  и  $d$ .



Фиг. 3. Структура с цилиндрични координати

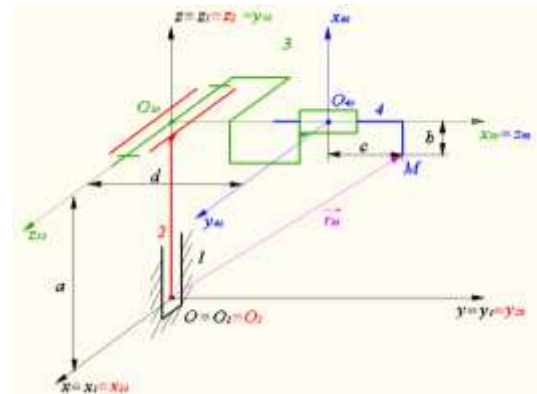
За  $r_M$  се получава:

$$(6) \quad r_M = \begin{pmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & f_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

където:  $f_1(t)$  е ъгълът на завъртане на звено 2 спрямо звено 1;  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$  са линейните премествания съответно на звена 3 и 4 спрямо звена 2 и 3.

#### Структура със сферични координати

На фиг. 4 е показана кинематичната схема на механизма със съответните координатни системи. Конструкционните размери са означени с  $a, b, c$  и  $d$ .



Фиг. 4. Структура със сферични координати

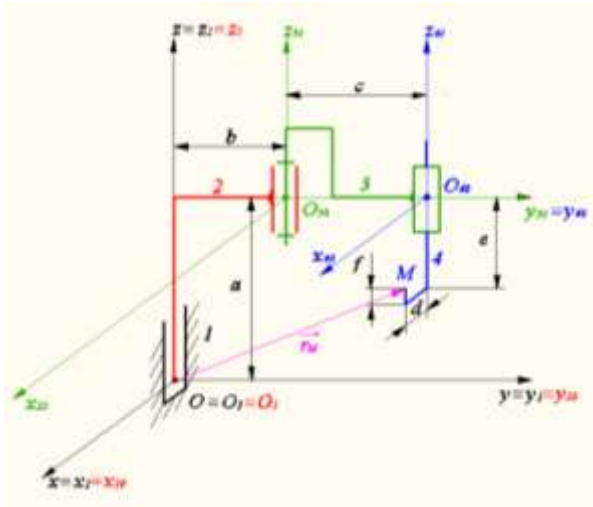
За  $r_M$  се получава:

$$(7) \quad r_M = \begin{pmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

където:  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  са ъглите на завъртане на съответно на звена 2 и 3 спрямо звена 1 и 2;  $f_3(t)$  е линейното преместване на звено 4 спрямо звено 3.

### Структура тип „Скара“

На фиг. 5 е показана кинематичната схема на механизма със съответните координатни системи. Конструкционните размери са означени с  $a, b, c, d, e$  и  $f$ .



Фиг. 5. Структура тип „Скара“

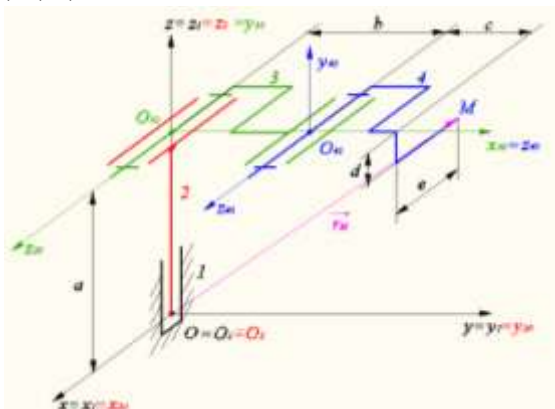
За  $r_M$  се получава:

$$(8) r_M = \begin{vmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 & cf_2(t) & -sf_2(t) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 & sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & b & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{matrix}$$

където:  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  са ъглите на завъртане на съответно на звена 2 и 3 спрямо звена 1 и 2;  $f_3(t)$  е линейното преместване на звено 4 спрямо звено 3.

### Антропоморфна структура

На фиг. 6 е показана кинематичната схема на механизма със съответните координатни системи. Конструкционните размери са означени с  $a, b, c, d$  и  $e$ .



Фиг. 6. Антропоморфна структура

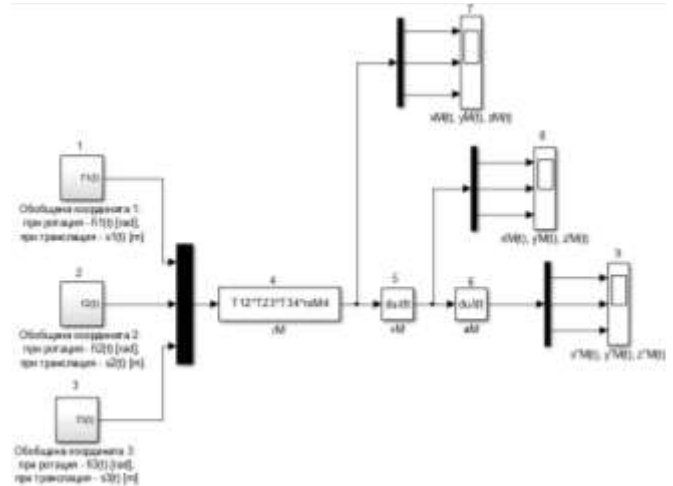
За  $r_M$  се получава:

$$(9) r_M = \begin{vmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & cf_3(t) & -sf_3(t) & 0 & b \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 & cf_2(t) & -sf_2(t) & 0 & 0 & sf_3(t) & cf_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{matrix}$$

където:  $f_i(t)$  са ъглите на завъртане на звена  $i+1$  спрямо  $i$ .

### Реализация на кинематичните модели в Matlab

На фиг. 7 е показана принципна блокова структура за решаване на правата задача на кинематиката на регионална подсистема на робот с три степени на свобода.



Фиг.7. Принципна блокова структура за решаване на правата задача на кинематиката на регионална подсистема на робот с три степени на свобода

При решаване на обратната задача на кинематиката ще се използват възможностите на Matlab за числено интегриране. Принципна блокова структура за реализиране на тази задача, както и числени решения за конкретни примери на манипулатори ще бъдат представени в следващи разработки.

### Заклучение

Обобщените кинематични модели на основните конфигурации на регионални подсистеми на промишлени роботи с три степени на свобода могат да се реализират в средата на програмен продукт Matlab, toolbox Simulink. За целта трябва да се изградят блокови структури за решаване на правата и обратната задачи на кинематиката.

### ЛИТЕРАТУРА

- Игнатова Д. Механика на универсални и специални работи. Лекция от Проект No BG051PO001-3.3.06-0002, 2013 г.;
- González P., A. Ortega, C. Sandoval, L. Cuevas, P. Mendoza, The Generalized Architecture of the Spherical Serial Manipulator, Adv Robot Autom 2016, 5:2 DOI:10.4172/2168-9695.1000148;
- Sailaja M., S. Phani kumar, M. Raja roy, Modeling, Simulation and Kinematics Calculations of Stanford Manipulator, International Journal of Engineering and Management Research, Volume-5, Issue-2, April-2015, ISSN (ONLINE): 2250-0758.

# ON THE KINEMATICS OF THE REGIONAL SUBSYSTEMS OF INDUSTRIAL ROBOTS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

G. Mihaylova, M. Tsoneva

## Resume

The present paper summarizes the kinematic models of the main regional subsystems of industrial robots with three degrees of freedom, created on the basis of the transformation of David and Hartenberg. Principal block structures for numerically solving the rights and inverse kinematics of these mechanisms in the middle of a Matlab software are presented.

## Kinematics model

- 1) **Cartesian structure** with three PPP translation pairs    2) **Structure with cylindrical coordinates** with one rotary and two translation pairs RPP and cylindrical reach space (Fig. 3):

$$r_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f_1(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f_2(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_M = \begin{bmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & f_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 3) **Structure with spherical coordinates** with two rotary kinematic pairs with intersecting axes and one translation pair RRP describes a spherically achievable space (Fig. 4):
- 4) **Structure "Scara"** with two rotary kinematic pairs with parallel axes and one translation pair RRP (Fig. 5):

$$r_M = \begin{bmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ cf_2(t) & -sf_2(t) & 0 & 0 \\ sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_M = \begin{bmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cf_2(t) & -sf_2(t) & 0 & 0 \\ sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & f_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 5) **Human anthropomorphic structure** with three RRR rotary pairs (Fig.5):

$$r_M = \begin{bmatrix} cf_1(t) & -sf_1(t) & 0 & 0 \\ sf_1(t) & cf_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ cf_2(t) & -sf_2(t) & 0 & 0 \\ sf_2(t) & cf_2(t) & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cf_3(t) & -sf_3(t) & 0 & b \\ sf_3(t) & cf_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M4} \\ y_{M4} \\ z_{M4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

In Matlab has set up a basic block structure for solving the true kinematics problem of a three-degree-of-freedom regional robot subsystem. Matlab's numerical integration capabilities will be used to solve the inverse kinematics problem. A basic block structure for accomplishing this task, as well as numerical solutions for specific manipulator examples, will be presented in future developments.

## Conclusions

The Generalized kinematic models of the basic configurations of regional industrial robot subsystems with three degrees of freedom can be realized in the middle of the Matlab software toolbox Simulink. To this end, block structures must be established to solve the kinematics and inverse problems of kinematics.

**Keywords:** Industrial robot, regional subsystem, Stanford Manipulator, kinematic model, Euler angles, transformation of Denavid and Hartenberg.