

AN EXAMPLE FOR LINEAR MODEL FOR SOLUTION OF AN EXACT ECONOMIC OPTIMIZATION PROBLEM BY APPROPRIATE SOFTWARE

ПРИМЕР НА ЛИНЕЕН МОДЕЛ ЗА РЕШАВАНЕ НА КОНКРЕТЕН ИКОНОМИЧЕСКИ ОПТИМИЗАЦИОНЕН ПРОБЛЕМ С ПОМОЩТА НА ПОДХОДЯЩ СОФТУЕР

VESELA VODENICHAROVA¹, SILVIA BAEVA²

¹Category 'Economics, Industrial Engineering and Management', Faculty of Management, Technical University of Sofia, 8 Kliment Ohridski Blvd., 1756 Sofia, Tel. 0894/227569, e-mail: vodenicharova_1989@abv.bg

²Category 'Stochastic and Optimization', Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia, 8 Kliment Ohridski Blvd., 1756 Sofia, Tel. 0895/587177, e-mail: sbaeva@tu-sofia.bg

ВЕСЕЛА ВОДЕНИЧАРОВА¹, СИЛВИЯ БАЕВА²

¹ Кат. „Икономика, индустриален инженеринг и мениджмънт“, Стопански факултет, Технически Университет – София, бул. „Климент Охридски“ №8, 1756, София, България, тел: 0894/ 227 569, e-mail: vodenicharova_1989@abv.bg

² Кат. „Стохастика и оптимизиране“, Факултет по приложна математика и информатика“, Технически университет – София, бул. „Климент Охридски“ № 8, 1756, София, България, тел. 0895/587177, e-mail: sbaeva@tu-sofia.bg

Keywords: linear optimization, problem of linear optimization, software, innovation technologies, distribution of limited resources.

Резюме – В условията на икономическа криза фирмите от различните отрасли на промишлеността и стопанската дейност се налага да решават много оптимизационни задачи. Решаването на този вид задачи може да се извърши чрез подходящ софтуер, който пести време, средства и т.н. на дадена фирма. В разработката е представен пример за разпределение на ограничени ресурси – суровини и материали за производството на определени продукти. Целта е да се получи максимален приход от продажбите на тези продукти. Разглежданият пример се формулира като задача на линейното оптимизиране. Линейните модели се използват най-вече в икономическия анализ и планирането. В последните 20 години особено бързо нарастват броят и разнообразието на изследваните проблеми и направените анализи за по-добро им разрешаване в промишлеността и стопанската дейност.

Abstract – In the condition of economic crisis the companies from the different branches of the industry and economic activity has to solve a lot of optimization problems. The solution of those types of problems could be done by suitable software, which saves time, money, etc. of an exact company. In the working out is shown an example for the distribution of limited resources – raw materials and material for the production of a certain products.

The aim is to receive maximum profit from the sale of those products. The mentioned example is formulated as a problem of linear optimization. The linear models are used in economic analysis and planning mostly. Over the last 20 years the number and variety of the studied problems and the analyses for their better solution in the field of industry and economic activity have increased markedly fast.

1. УВОД

В практиката човек се сблъсква всеки ден с много и различни проблеми, решаването, на които става с различни подходи, математически модели и модули, или чрез даден софтуер. За фирмите от различните отрасли на промишлеността или стопанската дейност всеки ден се появяват проблеми от различен характер, с които те трябва да се справят и решават. Анализът и решението на някои проблеми може да се улесни с помощта на подходящ софтуер. Примери за приложение на подходящ софтуер за решаване на оптимизационни задачи са направени в [2], [3], [4], [5].

През последните 40 години линейното оптимизиране намира много широко приложение при решаване на най-различни проблеми от отраслите на промишлеността, стопанската дейност, научните изследвания, транспорта и други. То е развито направление на математическото оптимизиране и е основа за създаването на други методи за изследване, анализ и решаване на различни видове проблеми от различни сфери на практиката [6].

1.1. Изследване, анализ и решаване на даден проблем

Много важен фактор в областта на решаването на проблемите на фирми от различните сфери на практиката, е разпространението на компютърната техника, напредването на телекомуникациите и новите технологии. Използването на математически модели при решаването на сложни задачи е свързано с голям обем изчисления и анализи, които не могат да се изпълнят ръчно. Това налага използване на подходящ софтуер за решаване на определени оптимизационни задачи.

В различните сфери понякога се използва понятието „наука за управлението” (‘management science’). В страните с развита икономика се използва широко в самолето и автомобилостроенето, при производството и разпределението на електроенергия, в електронната, хранителната, металургичната, нефтената, хартиената промишленост, в транспорта, рудодобива и други отрасли. Бързо нарастват приложенията във финансовите институции, болничните заведения и правителствените учреждения [6].

2. ИЗЛОЖЕНИЕ

2.1. Характеристика на линейното оптимизиране

Предмет на математическото оптимизиране е изучаването на следната задача: да се намери оптималната стойност (минимум или максимум) на някаква функция $f(x)$ за стойности на аргумента x , които принадлежат на някакво подмножество X на пространството R^n .

Много практически задачи могат да се формулират като задачи на линейното оптимиране, а линейните модели се използват най-вече в икономическият анализ и планирането [1], [6].

2.2. Задача на линейното оптимиране

Задачата на линейното оптимиране се състои в оптимизиране на линейна функция, наричана целева функция или критерий за оптималност, върху множество от линейни ограничения, които могат да са както равенства, така и неравенства по отношение на променливите, т. е. [1], [6]:

$$\begin{aligned} \max(\min) \{F(X) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n\} \\ \text{при ограничения: } \begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq (\geq \text{ или } =) b_i, & i = 1 \div m \\ x_j \geq 0, & j = 1 \div n \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

2.3. Състояние на проблема

Във фирма „Делтаком Електроникс“ ООД, Мениджър Производство и Мениджър Маркетинг са изправени пред проблем, който трябва да разрешат, като всеки решава проблема от своята област от практиката. Фирмата е с основен предмет на дейност производство, реализация и сервиз на електронна техника за кабелна и спътникова телевизия.

Мениджър Производство трябва да прецени как да разпредели ограничените ресурси на фирмата – различни видове суровини и материали, за производството на електронна техника, така че да може да се произведе определено количество, да има максимален приход за фирмата, без да бъде ошетен нито един от клиентите.

2.4. Цел на задачата

Целта на задачата е да се получи максимален приход от продажбата на произведените продукти при ограничените суровини и материали за производството им.

2.5. Постановка на задачата

Нека от суровините: $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$, които са съответно в количества: $q_1, q_2, \dots, q_k$ (брой), $q_{k+1}, \dots, q_n$ (гр.) се произвеждат продукти: $P_1, P_2, \dots, P_m$, които се продават съответно по цени: $c_1, c_2, \dots, c_m$ (лв./ 1 бр.).

В *таблица 1* са дадени разходните норми определени от технолога на фирмата, т.е. количествата от всяка суровина необходими за производството на всеки един продукт:

ТАБЛИЦА 1

	P_1	P_2		P_m
S_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
....				
S_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nm}

Отдел „Маркетинг” е направил проучване за търсенето на продуктите, които фирмата произвежда и предлага на пазара. Тогава Мениджър Производство и Мениджър Маркетинг определят, че трябва да се произведе поне:

b_1 броя от продукт P_1 ;

b_2 броя от продукт P_2 ;

.....

b_m броя от продукт P_m ,

като целта е да се получи максимален приход от реализирани продажби на продуктите.

2.6. Математически модел на задачата

Максималният приход от реализираните продажби на продуктите зависи (е функция) от единичната цена на продуктите и съответните им количества.

Нека x_j е количеството от j -тия продукт, $j=1, \dots, m$.

Тогава математическия модел на задачата е:

$$\max\{F(X) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n\}$$

при ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \leq q_i, \quad a_{ij} = \text{const}, \quad a_{ij} \in R^+, \quad q_i = \text{const}, \quad q_i \in R^+ \\ x_j \geq b_j, \quad b_j = \text{const}, \quad b_j \in Z^+ \\ x_j \in Z \\ i = 1 \div n, \quad j = 1 \div m \end{array} \right. \quad (2)$$

2.7. Данни на поставената задача

От 1 март 2013 г. започва едновременно ефирно излъчване на новия цифров сигнал паралелно с досегашния аналогов. От месец септември 2013 г. излъчването на аналогов сигнал спира и от тогава нататък потребителите могат да получават ефирно телевизионни програми само цифрово – чрез приемник с вграден цифров тунер и декодер MPEG-4 или с външен цифров MPEG-4 декодер.

Ето защо на пазара се налага по-голямото производство на продукти, необходими за цифровизацията.

Фирма „Делтаком Електроникс“ ООД произвежда следните продукти, необходими за цифровизацията:

<u>Продукти</u>	<u>Цени</u>
➤ Антени:	
• Вътрешни:	
- P_1 : Sky Sat P – 99	6,00 лв. = c_1
- P_2 : Sky Sat AHD – 243	15,00 лв. = c_2
- P_3 : Emme Esse Digit Flat	36,00 лв. = c_3
• Външни:	
- P_4 : Sky Sat LP – 21	21,00 лв. = c_4
- P_5 : Sky Sat LP – 69	24,00 лв. = c_5
- P_6 : Sky Sat AHD – 310	24,00 лв. = c_6
- P_7 : Sky Sat AHD – 343	30,00 лв. = c_7
- P_8 : Emme Esse 569 UD	30,00 лв. = c_8
- P_9 : Emme Esse 24 LX 45	39,60 лв. = c_9
- P_{10} : Emme Esse 45TLMS 37	53,28 лв. = c_{10}
- P_{11} : Emme Esse 45TLKWS 41	60,00 лв. = c_{11}
• Приемници (декодери):	
- P_{12} : Sky Sat Stable THD	50,00 лв. = c_{12}
• Усилватели:	
- P_{13} : Линеен усилвател Sky Sat LCA – 18 – T	15,00 лв. = c_{13}
- P_{14} : Линеен усилвател Sky Sat LCA – 20 – T	15,00 лв. = c_{14}
- P_{15} : Линеен усилвател Sky Sat DU – 202	36,00 лв. = c_{15}

Суровините и съответните им количества (в наличност), от които фирмата трябва да произведе посочените по-горе продукти са дадени в *Таблица 2*:

ТАБЛИЦА 2

Суровини	в брой	Суровини	в гр.
S_1	5326720895	S_9	4320562
S_2	6138240216	S_{10}	5070714
S_3	9760562132		
S_4	13986352112		
S_5	5682432622		
S_6	7863342687		
S_7	15620732375		
S_8	12684368884		

Разходните норми от суровините за производството на всеки един от продуктите са направени от технолога на фирмата - *Таблица 3*:

ТАБЛИЦА 3

Суровини Продукти	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
P_1	3	12	7	6	15	8	11	18	12	6
P_2	4	14	6	8	10	7	15	13	4	7
P_3	3	2	14	16	4	8	12	5	13	15
P_4	5	8	9	11	15	13	12	10	5	12
P_5	7	9	11	12	17	15	14	11	8	14
P_6	6	8	10	10	14	13	12	10	6	13
P_7	10	11	13	14	18	16	16	13	9	16
P_8	8	9	11	12	16	13	14	10	7	14
P_9	9	12	12	10	15	11	13	11	8	15
P_{10}	7	10	11	8	13	9	11	10	7	13
P_{11}	8	12	13	9	14	10	12	12	9	14
P_{12}	13	15	16	12	18	14	15	16	12	18
P_{13}	0	4	0	8	6	4	5	0	4	6
P_{14}	0	5	0	6	5	3	4	0	2	4
P_{15}	10	8	0	12	10	9	8	0	7	9

Мениджър Производство и Мениджър Маркетинг са преценили, че трябва да се произведе поне определен брой от всеки продукт, дадени в Таблица 4, като целта е да се получи максимален приход от продажбата на произведените от фирмата продукти.

ТАБЛИЦА 4

Продукти	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
брой	4516	8126	10302	9136	21856	23958	16874	
Продукти	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}
брой	17963	9635	16523	13582	67345	56987	74589	68957

Данните в поставената задача са дискретни.

2.8. Решаване на задачата

Решението на тази задача може да се представи с подходящ софтуер – *LINDO* и *LINGO*, който разполага с готови модули за конкретен вид оптимизационни задачи. В този случай – модул за решаване на целочислена задача на линейното оптимиране, в който са въведени данните от дадената задача.

```

LINGO - [LINGO Model - ZAD_OGR_RES3]
File Edit LINGO Window Help

Max 6X1+15X2+36X3+21X4+24X5+24X6+30X7+30X8+40X9+53X10+60X11+50X12+15X13+15X14+36X15
Subject to
2) 3X1+4X2+3X3+5X4+7X5+6X6+10X7+8X8+9X9+7X10+8X11+13X12+10X15<=5326720895
3) 12X1+14X2+2X3+8X4+9X5+8X6+11X7+9X8+12X9+10X10+12X11+15X12+4X13+5X14+8X15<=6138240216
4) 7X1+6X2+14X3+9X4+11X5+10X6+13X7+11X8+12X9+11X10+13X11+16X12<=9760562132
5) 6X1+8X2+16X3+11X4+12X5+10X6+14X7+12X8+10X9+8X10+9X11+12X12+8X13+6X14+12X15<=13986352112
6) 15X1+10X2+4X3+15X4+17X5+14X6+18X7+16X8+15X9+13X10+14X11+18X12+6X13+5X14+10X15<=5682432622
7) 8X1+7X2+8X3+13X4+15X5+13X6+16X7+13X8+11X9+9X10+10X11+14X12+4X13+3X14+9X15<=7863342687
8) 11X1+15X2+12X3+12X4+14X5+12X6+16X7+14X8+13X9+11X10+12X11+15X12+5X13+4X14+8X15<=15620732375
9) 18X1+13X2+5X3+10X4+11X5+10X6+13X7+10X8+11X9+10X10+12X11+16X12<=12684368884
10) 12X1+4X2+13X3+5X4+8X5+6X6+9X7+7X8+8X9+7X10+9X11+12X12+4X13+2X14+7X15<=4320562
11) 6X1+7X2+15X3+12X4+14X5+13X6+16X7+14X8+15X9+13X10+14X11+18X12+6X13+4X14+9X15<=5070714
12) X1>=4516
13) X2>=8126
14) X3>=10302
15) X4>=9136
16) X5>=21856
17) X6>=23958
18) X7>=16874
19) X8>=17963
20) X9>=9635
21) X10>=16523
22) X11>=13582
23) X12>=67345
24) X13>=56987
25) X14>=74589
26) X15>=68957

End
Gin 15

```

Фигура 1

След натискане на бутона *Solver* се получава и решението на дадената задача:

Global optimal solution found.
Objective value: 0.1516044E+08

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4516.000	-6.000000
X2	8126.000	-15.000000
X3	10302.00	-36.000000
X4	9136.000	-21.000000
X5	21856.00	-24.000000
X6	23958.00	-24.000000
X7	16874.00	-30.000000
X8	17963.00	-30.000000
X9	9635.000	-40.000000
X10	16523.00	-53.000000
X11	53660.00	-60.000000
X12	67345.00	-50.000000
X13	56987.00	-15.000000
X14	74590.00	-15.000000
X15	68957.00	-36.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.1516044E+08	1.000000
2	0.5323792E+10	0.000000
3	0.6134155E+10	0.000000
4	0.9757286E+10	0.000000
5	0.1398179E+11	0.000000
6	0.5677080E+10	0.000000
7	0.7859099E+10	0.000000
8	0.1561612E+11	0.000000
9	0.1268117E+11	0.000000
10	1114409.	0.000000
11	1.000000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	0.000000	0.000000
14	0.000000	0.000000
15	0.000000	0.000000
16	0.000000	0.000000
17	0.000000	0.000000
18	0.000000	0.000000
19	0.000000	0.000000
20	0.000000	0.000000
21	0.000000	0.000000
22	40078.00	0.000000
23	0.000000	0.000000
24	0.000000	0.000000
25	1.000000	0.000000
26	0.000000	0.000000

Фигура 2

3. Резултати

Максималният приход е **15 160 440 лв.** при следното производство и продажба на продуктите:

ТАБЛИЦА 5

Продукти	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
брой	4516	8126	10302	9136	21856	23958	16874	
Продукти	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}
брой	17963	9635	16523	53660	67345	56987	74589	68957

Забележка: Ако се пренебрегне проучването на отдел „Маркетинг” за броя на търсените продукти, които фирмата произвежда и предлага на пазара, т.е. се пренебрегнат тези ограничения в задачата, ще се получи, че фирмата трябва да произвежда само част от тези продукти (например два, три или повече на брой, но по-малко от необходимите) и ще се получи недостиг на продукти на пазара, макар и прихода от продажбата им да е по-голям.

4. Заключение

От направените анализи и решаване на конкретна оптимизационна задача, могат да се направят следните изводи:

- Софтуерните продукти LINDO и LINGO спестяват време и средства на фирма „Делтаком Електроникс“ ООД, а може да спести време и средства и на други фирми и организации, развиващи се в други направления;
- Предложеният софтуер LINDO и LINGO може да се използва и за друг вид задачи от линейното оптимизиране;
- Освен предложеният софтуер, могат да се използват и други софтуерни продукти, които да решават също оптимизационни задачи от линейното оптимизиране (например Maple, Matlab, Delphi, C++ и т. н.).

5. REFERENCES

- [1] E.Burkard, E.Cela, *Linear Assignment Problems and Extensions, Handbook of Combinatorial Optimization*, Vol. 4, Kluwer Publishers, 1999.
- [2] S. Baeva, C. Nedeva, *Optimal choice of a firm in conducting auction*, Математика и математическо образование, СМБ, 40-та Пролетна конференция на СМБ, Секция Б: Математическо моделиране и информатика, стр. 231-235, 2011.
- [3] S.Baeva, D. Komarevska, C. Nedeva, T. Todorov, *Optimization of the human resource efficiency in companies*, American Institute of Physics, CP 1184, p. 247–253, 2009.
- [4] S. Baeva, L. Komarevska, C. Nedeva, L. Trenev, *Multi-criterial Decision Making for Selection and Assignment of Sportsmen in Team-games*, American Institute of Physics, CP 1067, p. 451–457, 2008.
- [5] Y. Yonchev, S. Nikolov, S. Baeva, *An automated system for reduction of the firm's employees under maximal overall efficiency*, American Institute of Physics, CP 1497, p 402-411, 2012.
- [6] Г. Гатев, *Изследване на операциите*, ТУ-София, 2005.