JOURNAL
OF THE TECHNICAL UNIVERSITY AT PLOVDIV

<FUNDAMENTAL SCIENCES AND APPLICATIONS>

VOL. 5 1997

Series A - Pure and Applied Mathematics

PLOVDIV
BULGARIA

JOURNAL OF THE TECHNICAL UNIVERSITY AT PLOVDIV - <FUNDAMENTAL SCIENCES AND APPLICATIONS> publishes new and original results in the fields MATHEMATICS, MECHANICS, PHYSICS, CHEMISTRY AND ITS APPLICATIONS IN TECHNICAL SCIENCES. They can further be expanded to be published elsewhere.

The journal is indexed in *Mathematical Reviews* (USA), *Zentralblatt für Mathematik* (Germany) and *Referativniy Journal - Matematika* (Russie).

Address of the editorial office: Department of Mathematics, Physics and Chemistry, Technical University, 61, Sankt Petersburg Blvd., 4000 Plovdiv, Bulgaria, fax: +359 32 233 256; e-mail: isip @ tu-plovdiv.bg

Contents

© Journal of the Technical University at Plovdiv
"Fundamental Sciences and Applications", Vol. 5, 1997
BULGARIA

Системы управления

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ*

БОРИСЛАВ ПЕНЕВ

Аннотация. Рассматривается один класс линейных задач об оптимальном быстродействии - "*Задача A(n), Задача A(n-1), . . . , Задача A(1)*". Доказываем одно свойство, которое показывает наличие определенных отношений между двумя соседними задачами этого класса - между гиперповерхностью переключения одной задачи и траекторией изображающей точки с началом в начальном состоянии этой задачи, полученной под действием оптимального управления ее соседней справа задачи рассматриваемого класса.

1. Введение

1.1. *Задача A(k).* Рассматриваем следующую задачу о синтезе оптимального по быстродействию управления линейного объекта k-го порядка, которую будем называвать *Задачей A(k)*. Объект управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_k = A_k x_k + B_k u_k, \\
&x_k = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \; x_k \in R^k, \\
(1) \qquad &A_k = \operatorname{diag}(\lambda_1, \; \lambda_2, \; . \; . \; . \; . \; , \lambda_k), \quad \lambda_i \in R, \; \lambda_i \le 0, \; {\scriptstyle i,j=\overline{1,k}}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_i \ne \lambda_j \;\; \text{при} \;\; {\scriptstyle i \ne j}, \\
&B_k = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & . & . & . & b_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad b_i \in R, \; b_i \ne 0, \; {\scriptstyle i=\overline{1,k}}. \\
&\qquad\qquad\qquad \overline{1,k} = 1, \; 2, \; \ldots, \; k.
\end{aligned}
$$

Начальное состояние объекта представляет собой

$$(2) \qquad x_k(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & . & . & . & x_{k0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

* Статью рецензировал и рекомендовал к печати д.т.н. проф. Фалдин Н. В., Тульский государственный университет, Россия.

Received December 15, 1996

ISSN 1310 - 8271

а финальное состояние объекта (1) в момент t_{kf}, где t_{kf} неизвестный момент, представляет собой

(3) $$x_k(t_{kf}) = [\underbrace{0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0}_{k}]^{\mathrm{T}}.$$

Допустимое управление $u_k(t)$ является кусочно-непрерывной функцией (4), для которой для определенности в точках разрыва τ будем предполагать как в [3] (стр. 15), что значение управления $u_k(t)$ равно пределу слева (5), и что каждое допустимое управление непрерывно в концах отрезка, на котором оно задано.

(4) $$-u_0 \le u_k(t) \le u_0,\ u_0 = const,\ u_0 > 0$$

(5) $$u(\tau) = u(\tau - 0)$$

Задача A(k) *состоит в нахождении допустимого управления* $u_k = u_k(x_k)$ *в виде функции состояния* $x_k = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad . \quad . \quad . \quad x_k(t)]^{\mathrm{T}}$ *объекта (1), которое переводит объект (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и которое за этот переход минимизирует функционал*

(6) $$J_k = \int_0^{t_{kf}} dt = t_{kf}.$$

Задача A(k) представляет собой известную [2] задачу о синтезе оптимального по быстродействию управления. Она отвечает условиям известной *Теоремы об n интервалах* [2], [5], [6], [8] и для нее справедливо следующее свойство:

Для любой начальной точки $x_k(0)$ *существует оптимальное управление, которое единствено и представляет собой кусочно-постоянную функцию с амплитудой* u_0 *и имеет не более* ***k*** *интервалов постоянства.*

1.2. Класс задач "***Задача A(n), Задача A(n-1), . . . , Задача A(1)***".

Определение. *Клас задач* "***Задача A(n), Задача A(n-1), . . . , Задача A(1)***", *где* $n \ge 2$, *описывается* ***Задачей A(k)*** *(1) - (6) при* $k = \overline{n,1}$ ($\overline{n,1} = n,\ n-1\ ,\dots,\ 1$) *и связью между математическими объектами* ***Задачи A(k)*** *и* ***Задачи A(k-1)*** *при* $k = \overline{n,2}$ *в виде соотношений*

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix}, \text{ т.е. } \begin{matrix} A_k = A_{k-1} \oplus \lambda_k, \\ B_k = B_{k-1} \oplus b_k, \end{matrix}$$

$$(7) \qquad \boldsymbol{x}_k(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1}(0) \\ x_{k0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_k(t_{kf}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1}(t_{k-1f}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{т.е. } \boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_{k-1}(0) \oplus x_{k0}, \quad \boldsymbol{x}_k(t_{kf}) = \boldsymbol{x}_{k-1}(t_{k-1f}) \oplus 0.$$

Оптимальные управления. *Обозначим в классе задач* ***"Задача A(n), Задача A(n-1), . . . , Задача A(1)"*** *оптимальные управления как* $u_k^o(t)$, $k = \overline{n,1}$, *а посредством* t_{kf}^o, $k = \overline{n,1}$ *соответственно минимум функционалов* ***Задачи A(n), Задачи A(n-1), . . . , Задачи A(1).***

Гиперповерхности переключения. Используем понятие *гиперповерхность переключения* в задачах оптимального быстродействия [2], [3], [6] (стр. 613-618), [8]. Для рассматриваемого класса задач - ***"Задача A(n), Задача A(n-1), . . ., Задача A(1)"*** введем обозначение S_k, которое представляет *гиперповерхность переключения* ***Задачи A(k)*** $(k = \overline{n,2})$. Через L_{kk-1} будем обозначать совокупность всех точек в пространстве состояний объекта (1) ***Задачи A(k),*** для которых оптимальное управление имеет не более $(k-1)$ интервалов постоянства. Для ***Задачи A(k)*** *гиперповерхность переключения* S_k *стационарная.* Она проходит через начало координат и обладает следующим свойством [6] (стр. 615):

$(k-1)$*-мерная гиперповерхность переключения* S_k *совпадает с* $(k-1)$*-мерным множеством* L_{kk-1}.

В этой статье мы докажем одно свойство рассматриваемого класса задач, которое показывает наличие определенных отношений между двумя соседними задачами этого класса - между гиперповерхностью переключения одной задачи и траекторией изображающей точки с началом в начальном состоянии этой задачи, полученной под действием оптимального управления ее соседней справа задачи рассматриваемого класса.

2. Основной результат

Теорема. *Траектория изображающей точки в пространстве состояний объекта Задачи A(k), где $n \ge k \ge 2$, с началом в точке $x_k(0)$, представляющей собой начальное состояние объекта Задачи A(k), под действием оптимального управления Задачи A(k-1) $u^o_{k-1}(t)$ для $t \in [0,\ t^o_{k-1f}]$ лежит целиком на гиперповерхности переключения S_k или находится под или над гиперповерхностью переключения S_k, нигде не пересекая её.*

Доказательство. Для начальной точки $x_k(0)$ (2) существуют две альтернативные возможности по отношению к S_k:

1. $x_k(0)$ лежит на S_k, т.е. $x_k(0) \in S_k$;
2. $x_k(0)$ не лежит на S_k, т.е. $x_k(0) \notin S_k$ или иными словами находится под или над S_k.

Рассмотрим последовательно оба случая.

Случай 1: $x_k(0)$ лежит на S_k, т.е. $x_k(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & \dots & x_{k0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in S_k$.

Следовательно, оптимальное управление *Задачи A(k)* $u^o_k(t)$ имеет не более $(k-1)$ интервалов постоянства и для точек оптимальной траектории, которая целиком лежит на S_k, можем записать

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&x_k(t) = e^{A_k t} x_k(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k u^o_k(\tau)\,d\tau,\ t \in [0,\ t^o_{kf}],\\
&x_k(t^o_{kf}) = [\underbrace{0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{k}]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Имея ввиду соотношения (7) - связь между *Задачей A(k)* и *Задачей A(k-1)* для $x_k(t)$ в (8), можем записать

$$
x_k(t) = e^{A_k t} x_k(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k u^o_k(\tau)\,d\tau =
$$

$$
= e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0} \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}(t-\tau)} \begin{bmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} u^o_k(\tau)\,d\tau =
$$

$$
= \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_k(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} u^o_k(\tau)\,d\tau =
$$

$$=\begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}x_{k-1}(0) \\ e^{\lambda_k t}x_{k0} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}(t-\tau)}B_{k-1} \\ e^{\lambda_k(t-\tau)}b_k \end{bmatrix} u_k^o(\tau)d\tau =$$

$$(9) \qquad = \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}x_{k-1}(0) + \int_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)}B_{k-1}u_k^o(\tau)d\tau \\ e^{\lambda_k t}x_{k0} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)}b_k u_k^o(\tau)d\tau \end{bmatrix}, \quad t\in[0,\ t_{kf}^o].$$

Следовательно, для (8), используя (9), можем записать

$$(10) \qquad \begin{aligned} x_k(t) &= \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}x_{k-1}(0) + \int_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)}B_{k-1}u_k^o(\tau)d\tau \\ e^{\lambda_k t}x_{k0} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)}b_k u_k^o(\tau)d\tau \end{bmatrix}, \quad t\in[0,\ t_{kf}^o], \\ x_k(t_{kf}^o) &= [\underbrace{0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{k}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_{k-1}(t_{kf}^o) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из (10) видно, что кусочно-постоянная функция, имеющая не более $(k-1)$ интервалов постоянства - управление $u_k^o(t)$ переводит в $(k-1)$-мерном пространстве объекта ***Задачи A(k-1)*** начальную точку ***Задачи A(k-1)*** $x_{k-1}(0)$ в точку $x_{k-1}(t_{kf}^o) = [\underbrace{0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{k-1}]^{\mathrm{T}}$, которая и есть финальное состояние ***Задачи A(k-1)*** - начало координат пространства состояний объекта ***Задачи A(k-1)***. В силу свойств оптимального управления для ***Задачи A(k-1)*** из этого следует, что управление $u_k^o(t)$ является в этом случае и оптимальным управлением для ***Задачи A(k-1)***, т.е. в этом случае справедливо

$$(11) \qquad u_k^o(t) = u_{k-1}^o(t) \text{ и } t_{kf}^o = t_{k-1f}^o.$$

Следовательно, для (8), которое описывает точки оптимальной траектории, лежащей целиком на S_k, имеем, используя (11)

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_k(t) &= e^{A_k t}x_k(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)}B_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau, \quad t\in[0,\ t_{k-1f}^o], \\ x_k(t_{k-1f}^o) &= [\underbrace{0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{k}]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Этим и доказан случай 1 - $x_k(0)\in S_k$.

Случай 2: $x_k(0)$ не лежит на S_k, т.е. $x_k(0) \notin S_k$ или иными словами находится под или над S_k.

Следовательно, в этом случае оптимальное управление для ***Задачи A(k)*** $u_k^o(t)$ имеет ровно k интервалов постоянства. Для начального состояния (2) объекта (1) *Задачи A(k),* используя (7), можем записать

$$x_k(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & . & . & . & x_{k0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Применим оптимальное управление для *Задачи A(k-1)* $u_{k-1}^o(t)$ к начальной точке в пространстве состояний объекта *Задачи A(k)* с координатами

$$\begin{gathered} x_k^1(0) = \begin{bmatrix} x_{10} & . & . & . & x_{k-10} & x_{k0}^1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ = \begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0}^1 \end{bmatrix}, \quad x_{k0}^1 = -\frac{\int\limits_0^{t_{k-1f}^o} e^{\lambda_k (t_{k-1f}^o - \tau)} b_k u_{k-1}^o(\tau) d\tau}{e^{\lambda_k t_{k-1f}^o}}. \end{gathered} \tag{14}$$

Тогда для изображающей точки с координатами $x_k^1(t)$ можем записать

$$x_k^1(t) = e^{A_k t} x_k^1(0) + \int\limits_0^t e^{A_k (t-\tau)} B_k u_{k-1}^o(\tau) d\tau, \ t \in [0,\ t_{k-1f}^o]. \tag{15}$$

Используя (14), для (15) получаем

$$\begin{aligned} x_k^1(t) &= e^{A_k t} x_k^1(0) + \int\limits_0^t e^{A_k (t-\tau)} B_k u_{k-1}^o(\tau) d\tau = \\ &= e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0}^1 \end{bmatrix} + \int\limits_0^t e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} (t-\tau)} \begin{bmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} u_{k-1}^o(\tau) d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^{A_{k-1} t} x_{k-1}(0) + \int\limits_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)} B_{k-1} u_{k-1}^o(\tau) d\tau \\ e^{\lambda_k t} x_{k0}^1 + \int\limits_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} b_k u_{k-1}^o(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$
(16) \qquad = \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}x_{k-1}(0) + \int\limits_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)}B_{k-1}u_{k-1}^o(\tau)d\tau \\ (-1)\dfrac{\int\limits_0^{t_{k-1f}^o} e^{\lambda_k(t_{k-1f}^o-\tau)}b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau}{e^{\lambda_k(t_{k-1f}^o-t)}} + \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)}b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \end{bmatrix}
$$

для $t \in [0,\ t_{k-1f}^o]$.

Так как $u_{k-1}^o(t)$ есть оптимальное управление для ***Задачи A(k-1)***, то для состояния точки $x_k^1(t)$ в момент t_{k-1f}^o, имея ввиду (16), можем записать

$$
x_k^1(t_{k-1f}^o) = \begin{bmatrix} x_{k-1}(t_{k-1f}^o) \\ (-1)\int\limits_0^{t_{k-1f}^o} e^{\lambda_k(t_{k-1f}^o-\tau)}b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau + \int\limits_0^{t_{k-1f}^o} e^{\lambda_k(t_{k-1f}^o-\tau)}b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \end{bmatrix} =
$$

$$
(17) \qquad = \begin{bmatrix} x_{k-1}(t_{k-1f}^o) \\ 0 \end{bmatrix} = [\underbrace{0 \ \ 0 \ \ . \ \ . \ \ . \ \ 0}_{k}]^{\mathrm{T}}.
$$

Из (17) следует, что оптимальное управление для ***Задачи A(k-1)*** $u_{k-1}^o(t)$, которое представляет кусочно-постоянную функцию и имеет не более $(k-1)$ интервалов постоянства, переводит точку $x_k^1(0)$ (14) в момент t_{k-1f}^o в координатное начало пространства состояний объекта (1) ***Задачи A(k)***. Следовательно, точка $x_k^1(0)$ и траектория, полученная под действием управления $u_{k-1}^o(t)$ с началом в $x_k^1(0)$ для $t \in [0,\ t_{k-1f}^o]$, лежат целиком на *гиперповерхности переключения* S_k.

Рассмотрим сейчас траекторию изображающей точки $x_k(t)$ в пространстве состояний ***Задачи A(k)*** с началом в начальном состоянии $x_k(0)$ (2) ***Задачи A(k)***, которое представим в виде (13), под действием оптимального управления $u_{k-1}^o(t)$ ***Задачи A(k-1)***. Для $x_k(t)$ можем записать, имея ввиду (7)

$$
x_k(t) = e^{A_k t}x_k(0) + \int\limits_0^t e^{A_k(t-\tau)}B_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau =
$$

$$
= e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}t}\begin{bmatrix} x_{k-1}(0) \\ x_{k0} \end{bmatrix} + \int\limits_0^t e^{\begin{bmatrix} A_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}(t-\tau)}\begin{bmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{bmatrix} u_{k-1}^o(\tau)d\tau =
$$

$$(18)\qquad = \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}\boldsymbol{x}_{k-1}(0) + \int_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)} B_{k-1} u_{k-1}^o(\tau)d\tau \\ e^{\lambda_k t} x_{k0} + \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \end{bmatrix},\ t \in [0,\ t_{k-1f}^o].$$

Образуем разницу между $\boldsymbol{x}_k(t)$ и $\boldsymbol{x}_k^1(t)$. Согласно (18) и (15) имеем

$$(19)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}_k^1(t) &= e^{A_k t}\boldsymbol{x}_k(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau - \\ &- \left[e^{A_k t}\boldsymbol{x}_k^1(0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \right],\ t \in [0,\ t_{k-1f}^o]. \end{aligned}$$

Для (19), имея ввиду (16) и (18), получаем:

$$(20)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}_k^1(t) &= \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}\boldsymbol{x}_{k-1}(0) + \int_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)} B_{k-1} u_{k-1}^o(\tau)d\tau \\ e^{\lambda_k t} x_{k0} + \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} e^{A_{k-1}t}\boldsymbol{x}_{k-1}(0) + \int_0^t e^{A_{k-1}(t-\tau)} B_{k-1} u_{k-1}^o(\tau)d\tau \\ e^{\lambda_k t} x_{k0}^1 + \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} b_k u_{k-1}^o(\tau)d\tau \end{bmatrix},\ t \in [0,\ t_{k-1f}^o]. \end{aligned}$$

Или для разницы из (20) получаем

$$(21)\qquad \boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}_k^1(t) = \begin{bmatrix} [\underbrace{0\ \ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{k-1}] & e^{\lambda_k t}(x_{k0} - x_{k0}^1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad t \in [0,\ t_{k-1f}^o].$$

Проанализируем разницу между $\boldsymbol{x}_k(t)$ и $\boldsymbol{x}_k^1(t)$ по (21). Рассмотрим k-ую координату $e^{\lambda_k t}(x_{k0} - x_{k0}^1)$:

1. $x_{k0} \neq x_{k0}^1$, в противном случае начальное состояние $\boldsymbol{x}_k(0)$ лежит на S_k, но мы рассматриваем случай $\boldsymbol{x}_k(0) \notin S_k$.
2. $e^{\lambda_k t}(x_{k0} - x_{k0}^1)$ для $t \in [0,\ t_{k-1f}^o]$ не меняет свой знак и никогда не становится равным нулю, так как t_{k-1f}^o - конечное время.

Следовательно, в пространстве состоянии ***Задачи A(k)*** траектория изображающей точки $\boldsymbol{x}_k^1(t)$ (15) с начальным состоянием $\boldsymbol{x}_k^1(0)$ (14), полученная под действием $u^o_{k-1}(t)$ для $t\in[0,\ t^o_{k-1f}]$ и лежащая целиком на *гиперповерхности переключения* S_k, является проекцией на *гиперповерхность переключения* S_k траектории изображающей точки $x_k(t)$ с началом в начальном состоянии $x_k(0)$ (2) ***Задачи A(k)*** под действием оптимального управления ***Задачи A(k-1)*** $u^o_{k-1}(t)$ для $t\in[0,\ t^o_{k-1f}]$ с направлением проекции по оси $0x_k$, и при этом траектория изображающей точки $x_k(t)$ для $t\in[0,\ t^o_{k-1f}]$ нигде не пересекает *гиперповерхность переключения* S_k. Этим доказан и случай 2 - $x_k(0)$ не лежит на S_k, т.е. $x_k(0)\notin S_k$.

Теорема окончательно доказана.

Литература

1. Я. ТАГАМЛИЦКИ. Интегрално смятане, София, Наука и изкуство, 1978.
2. М. АТАНС, П. ФАЛБ. Оптимальное управление, Москва, Машиностроение, 1968.
3. Л. С. ПОНТРЯГИН, В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Е. Ф. МИЩЕНКО. Математическая теория оптимальных процессов, Москва, Наука, 1983.
4. Р. ХОРН, Ч. ДЖОНСОН. Матричный анализ, Москва, Мир, 1989.
5. Н. Д. НАПЛАТАНОВ. Основи на техническата кибернетика - том 5 (Л. А. Гунчев. Оптимално управление), София, Техника, 1987.
6. А. А. ФЕЛЬДБАУМ, А. Г. БУТКОВСКИЙ. Методы теории автоматического управления, Москва, Наука, 1971.
7. Л. С. ПОНТРЯГИН. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука, 1965.
8. В. А. ИВАНОВ, Н. В. ФАЛДИН. Теория оптимальных систем автоматического управления, Москва, Наука, 1981.

кафедра "Опто-электроника и лазерная техника"
Технический университет
бул. "Санкт - Петербург" 61
4000 Пловдив
БОЛГАРИЯ

Department "Optoelectronics and laser equipment"
Technical University
61, Sankt Petersburg blvd.
4000 Plovdiv
BULGARIA

ISSN 1310 - 8271

JOURNAL OF THE TECHNICAL UNIVERSITY AT PLOVDIV (BULGARIA)

<FUNDAMENTAL SCIENCES AND APPLICATIONS>

JOURNAL OF THE TECHNICAL UNIVERSITY AT PLOVDIV

Vol 5

<u>Рецензия</u>

на статью Пенева Б.Г. "Доказательство одного свойства одного класса задач об оптимальном быстродействии"

Статья Пенева Б.Г. направлена на решение одной из наиболее трудных задач теории оптимального управления - задачи синтеза оптимального по быстродействию управления для объектов высокого порядка. Над решением этой задачи трудились ученые многих стран. Она имеет почти полувековую историю. Однако, несмотря на прогресс в области вычислительной техники, в области математической теории оптимального управления, эта задача до сих пор остается нерешенной.

Статья Пенева Б.Г., на первый взгляд, не связана непосредственно с решением задачи синтеза оптимального по быстродействию управления. В работе доказывается, что траектория объекта $A(n)$ $(n=N,N-1,...,2)$, если на него воздействует оптимальное управление в смысле задачи $A(n-1)$, не может пересекать поверхности переключения для объекта $A(n)$. Отсюда, как нетрудно установить, следует, что значение оптимального управления в смысле задачи $A(n)$ для каждого момента времени t может быть определено с помощью оптимального управления задачи $A(n-1)$, т.е. оптимальное управление в системе более высокого порядка может быть определено с помощью оптимального управления для системы более низкого порядка. Это дает возможность разработать многоэтапную процедуру определения оптимального управления в системах ~~более~~ высокого порядка.

Полученный в статье Пенева Б.Г. научный результат имеет несомненную ценность для теории оптимального управления, так как открывает неплохие перспективы для синтеза оптимальных по быстродействию систем. Правда, определение оптимального управления по указанному алгоритму сопряжено, на наш взгляд, с большими затратами машинного времени. Поэтому реализовать по такой схеме оптимальный регулятор, когда все вычисления должны выполняться в реальном масштабе времени, можно далеко не всегда.

В статье использована не совсем удачная система обозначений, которая затрудняет восприятие работы. Нецелесообразно для исходной задачи и ее подзадач применять одинаковые обозначения. Например, объект

(1) относится к задаче $\boldsymbol{A(N)}$, а помечен индексом $\boldsymbol{n}$. Термин гиперповерхность является устаревшим. В современной математической литературе гиперповерхность называют поверхностью независимо от размерности пространства.

В статье Пенева Б.Г., как уже отмечалось, получен результат, ценность которого для теории оптимального управления несомненна. Сформулированная в работе теорема имеет корректное математическое доказательство. Считаем, что статью Пенева Б.Г. следует опубликовать в Известиях Технического Университета в Пловдиве.

Отзыв составил д.т.н., проф. Фалдин Н.В.

Отзыв рассмотрен на заседании кафедры "Системы автоматического управления" Тульского государственного университета (Россия). 2 декабря 1996 года.

Зав. каф. "Системы
автоматического управления" д.т.н., проф. Фалдин

Подпись Фалдина Н.В. заверяю
Ученый секретарь университета Л.И. Лосева