

# МОДЕЛИРАНЕ НА ТРАНСПОРТНИЯ ТРАФИК В КЛАСА НА ОБЕКТИТЕ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

**Василка Стоилова, Емил Николов**

***Резюме:** Представен е аналитично изведен модел на обект с разпределени параметри от първи ред, използван за моделиране на пътния трафик в автомагистралаи.*

***Ключови думи:** транспортен трафик, обекти с разпределени параметри*

## MODELING OF THE TRANSPORT TRAFFIC IN THE CLASS DISTRIBUTED PARAMETERS PLANT

**Vassilka Stoilova, Emil Nikolov**

***Abstract:** Analytical derived first order distributed parameters model, used for modeling transport traffic in highways, is presented.*

***Keywords:** Transport Traffic, Distributed Parameters Plants*

### ВЪВЕДЕНИЕ

Транспортните потоци са сложни системи, за чието описание се прилагат различни модели и аналитичен инструментариум. Към транспортните потоци се отнася и транспортния трафик в автомагистралаи. Областта на приложение на моделите на транспортния трафик влияе върху конкретния избор на стратегия и принципи за управление. Настоящата разработка си поставя за цел да представи модел на транспортния трафик в автомагистралаи в класа на динамичните системи с разпределени параметри от първи ред на Lighthill-Whitam-Richards, апроксимиран със зависимостта на Greenshield и анализира резултатите от симулация на този модел в контекста на преходните, импулсните преходни функции и честотните характеристики на обекта с разпределени параметри.

### МАКРОСКОПИЧНИ МОДЕЛИ

Макроскопичните модели се основават на аналогия с хидродинамиката, според която потокът автомобили се разглежда като движение на флуид при непрекъснатото му придвижване. Макроскопичните модели се базират на принципи, основаващи се на динамиката на газ. При макроскопичните модели трафикът се описва със съвкупност от термини, като се отчита плътността  $\rho$ , средна скорост  $v$ , дебит  $q$  и др. Макроскопичните модели имат голямо значение за текущата практика и управление за транспортни системи. Според макроскопичните модели поведението на шофьорите зависи от фактори на прякото обкръжение.

Моделите се писват с частни диференциални уравнения, независимите променливи от този тип са времето  $t$  и местоположението  $x$  по дължината на един пътен участък. Зависимите променливи са поток (дебит)  $q$ , плътност  $\rho$ , скорост  $v$  и се разглеждат за отделна секция на пътя. Някои модели могат да се представят с частни диференциални уравнения, които отчитат налягането на дебита  $q$  или налягането на скоростта  $v$ . Макроскопичните модели започват с уравнения от първи ред-моделът на Lighthill-Whitham-Richards свързан с изменението на плътността  $\rho$ , а моделът от втори ред на Payne взема в предвид скоростта  $v$ , моделът предложен от Helbing е за изменение на три променливи. При макроскопичните модели отделните коли се разглеждат като частици, чиито размери, както и разстоянията между тях са пренебрежими. Дължината на разглеждания участък, които може да е различен от съставлящата инфраструктура също е пренебрежим. Така основните променливи на трафика са: дебит  $q$ , скорост  $v$  и плътност  $\rho$ , които представляват непрекъснати променливи във времето и пространството. В действителност непрекъснатостта на потока коли е само една апроксимация на реалността, но за макроскопичното ниво това допускане е адекватно и е прецизно за регулиране на магистралния трафик. Теорията на трафика не може точно да опише явленията в съответна физическа или математическа област. Законът за консервативността на материята е единственото уравнение, което съответства на реално физическо явление и се отчита при потокът от коли. Другите уравнения представят груби апроксимации и интуитивни идеализации за различни имперични наблюдения. Независимо, че уравнението за непрекъснатост на потока е критикувано [Papageorgiou 1997] този закон винаги се използва при симулации и за макроскопични модели от първи ред. Тези модели са валидирани в изследователски работи както и в практически приложения.

### МОДЕЛ ОТ ПЪРВИ РЕД *Lighthill-Whitham-Richards*

Първи макроскопични модели са дадени независимо в работите на Lighthill и Whitham [Lighthill 1955] и Richards [Richards 1956]. Те прилагат аналогия между потока от коли и потока на флуид, за да създадат един модел с не голяма сложност и широка приложимост. Моделите от типа LWR използват фундаменталната зависимост (1). Уравнението за консервативността (2) и предположението, че скоростта  $v$  е известна функция на плътността  $\rho$  (3). Всъщност (2) е едно уравнение, което позволява да се определи потокът от коли независимо коя секция от пътя се разглежда и включва зависимост между дебит и плътност като функции на независимите аргументи време и пространство.

$$q(x, t) = \rho(x, t) \cdot v(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$v(x, t) = F(\rho(x, t)) \quad (3)$$

Тези модели имат много недостатъци [Daganzo 1995b], [Papageorgiou 1998a], които се основават на много нереалистични допускания. Първото е, че скоростта  $v$

се адаптира мигновено на желана скорост и че дебита  $q$  на изхода от вълни на задръствания или стесняване на пътя е равен на капацитета на инфраструктурата. Друго допускане, което не се доказва, е да се приеме че плътността на една вълна от задръствания има по-малка скорост от скоростта, където плътността е по-слаба. Това означава, че опашката ще стигне тялото на шока, което е нереалистично. Моделът LWR не позволява да се представят нестабилностите като тип на трафик ‘stop and go’ (последователности от ускорения и спиращи пътища при задръствания).

## ФУНДАМЕНТАЛНА ДИАГРАМА НА ПЪТНИЯ ТРАФИК

За всеки елемент на инфраструктурата параметрите средна скорост  $v$ , плътност  $\rho$  и поток  $q$ , които представляват трите най-важни променливи са свързани в фундаментална диаграма фиг.1, която аналитично се определя от уравнение (4).

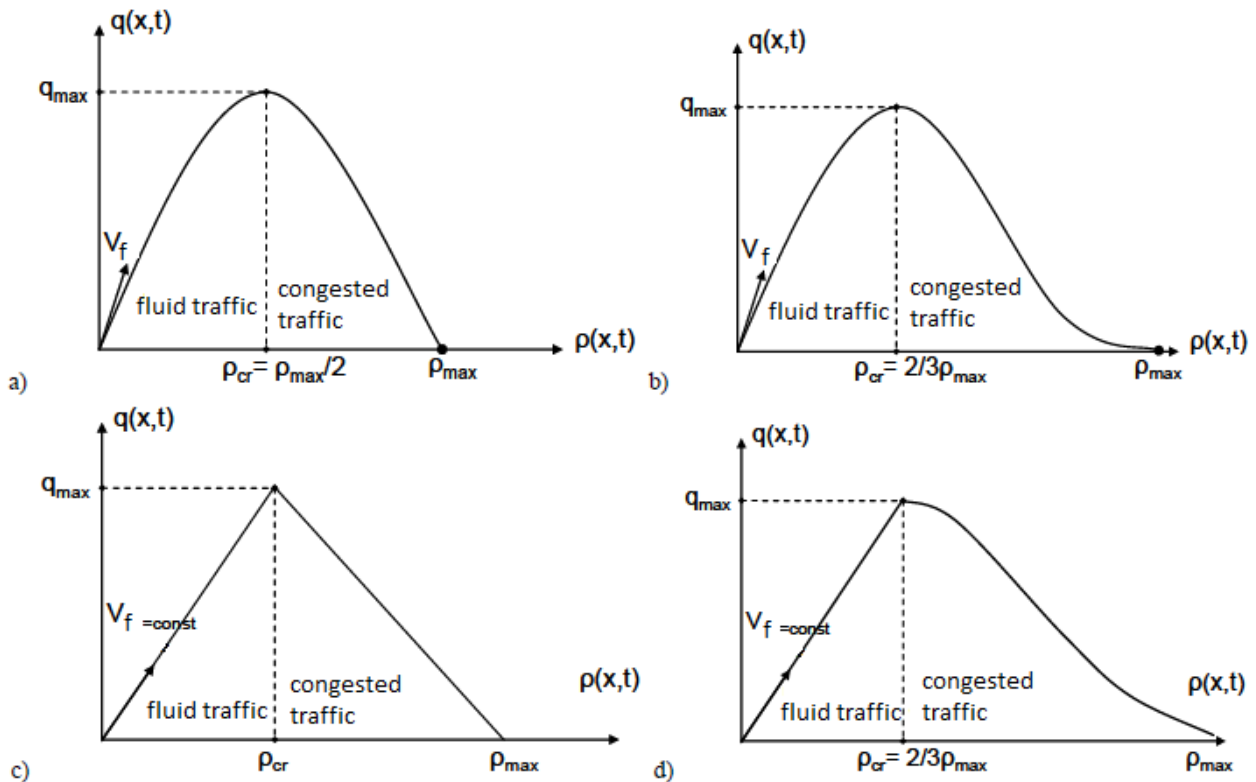
$$q(x, t) = \rho(x, t) \cdot F(\rho(x, t)) \quad (4)$$

Параметрите в описанието на фундаменталната диаграма са: максимална плътност  $\rho_{max}$ , желана скорост  $v_f$ , максимален дебит  $q_{max}$  и оптимална плътност (критична)  $\rho_{cr}$ , която съответства. Максимум на потока се наблюдава по оптимална комбинация на стойностите на другите два параметъра. Фундаменталната диаграма зависи от три параметъра и трябва да се представи в тримерно пространство. Все пак за удобство се използват проекциите в равнината поток-плътност ( $q-\rho$ ), плътност-скорост ( $\rho-v$ ) и скорост-поток ( $v-q$ ), които обикновено се използват най-вече поток-плътност ( $q-\rho$ ). Потокът се определя от стойността на плътността и се използва като оценка за качеството на транспортния поток по зададената отсечка (фиг.1). Във фундаменталните диаграми има два региона на трафик като флуид и трафик в задръстване. Потокът съответстващ на течащ флуид се характеризира със скорост и движение на колите докато при режима на задръстване се забелязва формиране на опашки с бавно движение с последователни ускорения и спирания. Увеличаването на дебита се преустановява за критична стойност на плътността, което се определя от капацитета на инфраструктурата- това е максималния възможен дебит. За по-големи стойности на плътността потокът-дебитът намалява, докато се нулира при максимална стойност на плътността.

Greenshield [Greenshield 1935] е първият автор, които предлага математически модел на фундаменталната диаграма. Той счита, че плътността  $\rho$  и дебитът  $q$  намаляват линейно, което води до параболичната форма на фундаменталната диаграма. Предложени са и други форми, от други автори: параболична диаграма - [Greenshield 1935], Masson; бипараболична диаграма с хоризонтална тангента - [Greenberg 1959]; бипараболична диаграма - [Buisson 1995]; триъгълна диаграма - [Cassidy 1998]; трапецовидна диаграма- [Daganzo 1994]; експоненциална диаграма - [Drake 1967], [Parageorgiou 1990]; криволинейна диаграма – [Cramer, Pipes 1967].

Разнообразни математически модели са предложени от различни автори, за да опишат фундаменталната диаграма [Garthner 1998]. Те се формулират като се използва свободната скорост на движение  $v_f$  максималната плътност  $\rho_{max}$  кри-

тичната плътност  $\rho_{cr}$ , и максималния поток  $q_{max}$ . Най-известните математически зависимости са на Greenshield (5) [Greenshield 1935], Greenberg (6). Други модели са съставени от две отделни части за двата режима на трафик от May и Keller и van Aerde. Зависимостта между скоростта  $v$  и плътността  $\rho$  има форми съгласно [Chandler 1958] (7), Drew (8), Edie (9) и Williams [Gartner 1984], [Drake 1967] (10).



Фиг.1. Фундаментална диаграма на пътният поток:  
 a) Greenshield; b) Drake; c) Cassidy; d) Greenberg

$$v(x, t) = v_f \left( 1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) - \text{Greenshield} \quad (6)$$

$$v(x, t) = v_f \left( \ln \left( \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) \right) - \text{Greenberg} \quad (6)$$

$$v(x, t) = \frac{q_{max}}{\rho(x, t)} \left( 1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) - \text{Chandler} \quad (7)$$

$$v(x, t) = v_f \left( 1 - \left( \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right)^{1/2} \right) - \text{Drew} \quad (8)$$

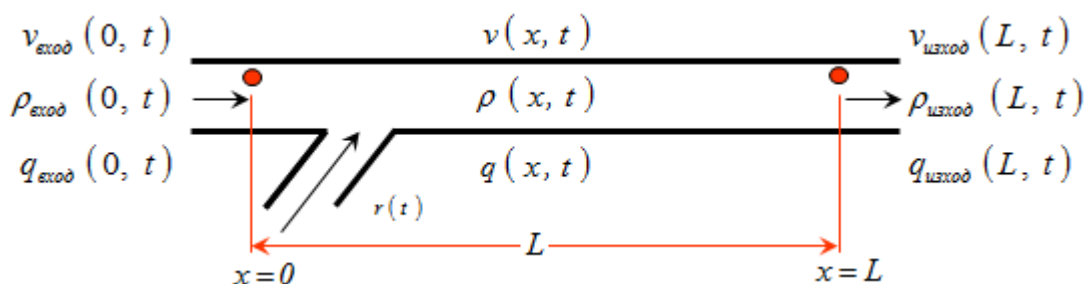
$$v(x, t) = v_f \cdot e^{(-\rho(x, t)/\rho_{max})} - \text{Edie} \quad (9)$$

$$v(x, t) = v_f \exp \left( \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{\rho(x, t)}{\rho_{\alpha}} \right)^{\alpha} \right) - \text{Drake} \quad (10)$$

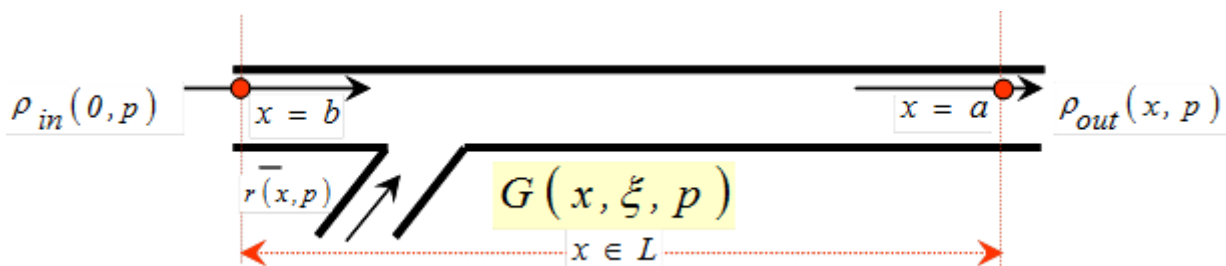
Важно е да се отбележи, че няма универсална фундаментална диаграма за всякаква инфраструктура. Всяка зависимост по-горе е изведена за конкретни условия и важи за ограничени и/или конкретни случаи.

### ОБЕКТ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

Управлението на трафика (фиг.2) цели да се намали времето за пътуване, което се постига с увеличаване на дебита. За входна (управляваща) величина се приема плътността на входа, а за изходна (регулируема) величина плътността на изхода на моделирания участък с дължина  $L$  от автомагистралата. В конкретната разработка се приема структурният модел на динамичната система с разпределени параметри, показан на фиг.3.



Фиг.2. обобщен структурен модел на трафика като обект за управление



Фиг.3. Динамична система с разпределени параметри

За да бъде решено уравнението на консервативността (2), моделиращо трафика, се използва връзката между дебит  $q$ , скорост  $v$  и плътност  $\rho$ .

За да се приведе уравнението на консервативността (2) изцяло по частните производни само на една от величините - плътността  $\rho$ , трансформираното уравнение (2) трябва да съдържа единствено и само някои от зависимостите [Nikolov 2010]:

$$\rho(x, t), \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial^n \rho(x, t)}{\partial t^n}, \frac{\partial^n \rho(x, t)}{\partial x^n}$$

След като се намери решението на трансформираното уравнение на консервативността(2) по  $\rho(x, t)$ , то определянето на останалите величини (в случая дебит  $q(x, t)$  или скорост  $v(x, t)$ ) се основава на вече известни зависимости на тези величини от намереното решение  $\rho(x, t)$ .

След аналитични трансформации се получава разпределената предавателна функция за уравнението на трафика (11), (12):

$$G(x, \xi, p) \cong \frac{\frac{e^{-\frac{L}{v_f(1-2\rho_0)}}}{v_f(1-2\rho_0)}}{\left(\frac{L}{2 v_f(1-2\rho_0)} p + 1\right)} e^{-\frac{L}{2 v_f(1-2\rho_0)} p} \quad (11)$$

$$G(x, \xi, p) \cong \frac{\rho_{out}(x, p)}{\rho_{in}(0, p)} = \frac{k(x, \xi, v_f, \rho_0)}{\left(T(x, \xi, v_f, \rho_0) p + 1\right)} e^{-\tau(x, \xi, v_f, \rho_0) p} \quad (12)$$

в която разпределените предавателен коефициент  $k$ , времеконстанта  $T$  и закъснение  $\tau$  са отразени с (13)÷(15), както следва:

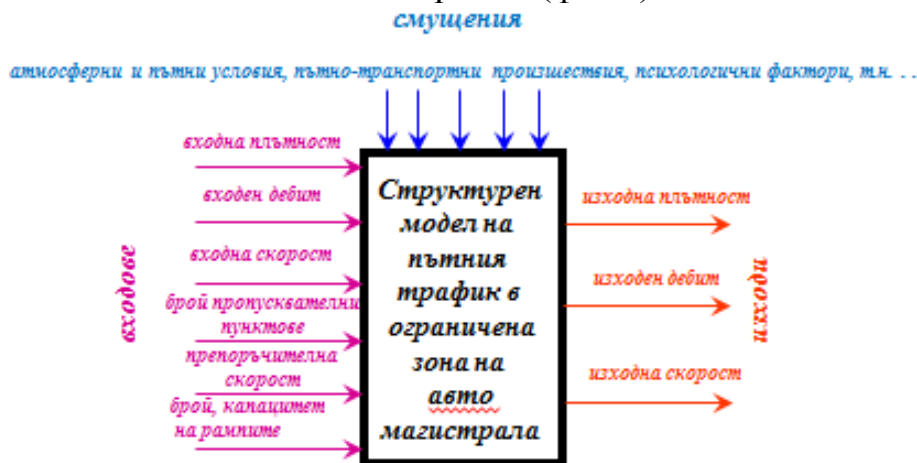
$$k(x, \xi, v_f, \rho_0) = |G(x, \xi, j\omega)| \cong \frac{e^{-\frac{L}{2 v_f(1-2\rho_0)}}}{v_f(1-2\rho_0)} \quad (13)$$

$$T(x, \xi, v_f, \rho_0) \cong \frac{x-L}{2 v_f(1-2\rho_0)} = \frac{L}{2 v_f(1-2\rho_0)} \quad (14)$$

$$\tau(x, \xi, v_f, \rho_0) \cong \frac{x-L}{v_f(1-2\rho_0)} = \frac{L}{v_f(1-2\rho_0)} \quad (15)$$

## РЕЗУЛТАТИ

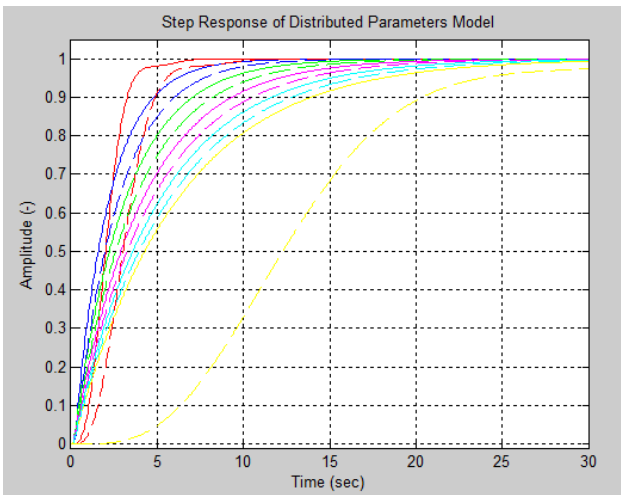
Структурният модел на пътния трафик в ограничена зона на автомагистрала е показан (фиг.4). Направена е симулация за такъв сегмент от автомагистрала показваща преходните, импулсните и честотните Nyquist, Bode и Nichols характеристики на обекта с разпределени параметри за моделиране на пътния трафик, при конкретни стойности на входната рампа (фиг.3).



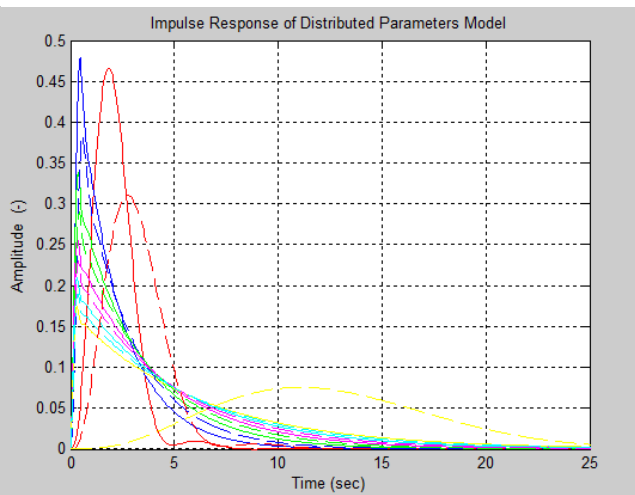
Фиг.4. Структурен модел на пътния трафик в автомагистрала

$$0 \text{ km/h} \leq v_f \leq 220 \text{ km/h}; \rho_{\max} = 160 \text{ veh/km}; 0.25 \leq \rho_0 \leq 0.4956; \rho_{cr} = 0.5 \rho_{\max} = 80 \text{ veh/h}; \rho_{cr\_ramp} = 0.1, \rho_{\max} = 16 \text{ veh/km}; q_{\max} = 8800 \text{ veh/km}; 0 \text{ km} \leq L \leq 12.5 \text{ km}$$

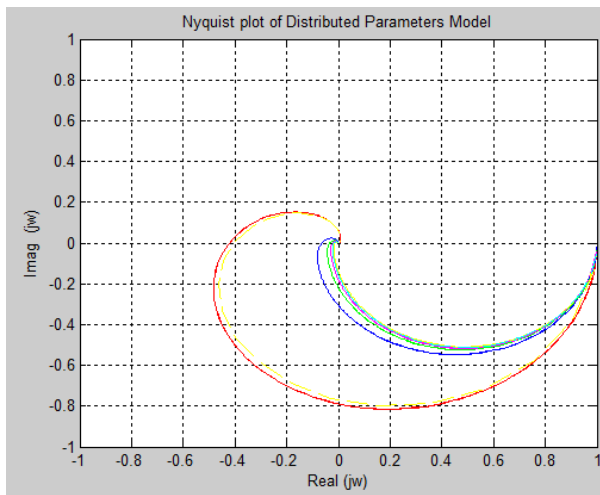
Резултатите от симулацията са показани на фиг.5÷фиг.12



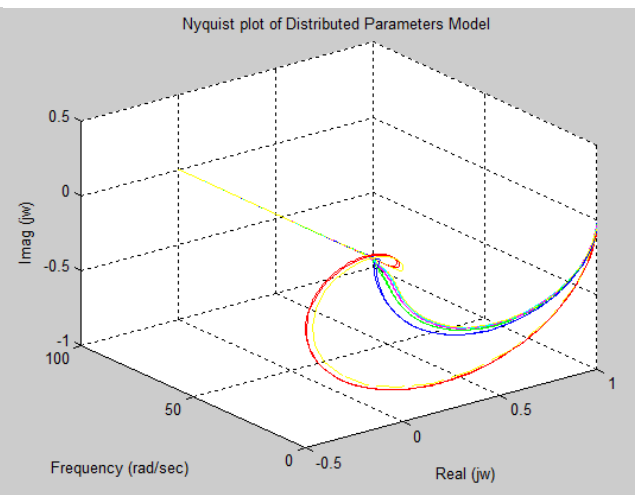
Фиг.5. Преходна функция на обекта



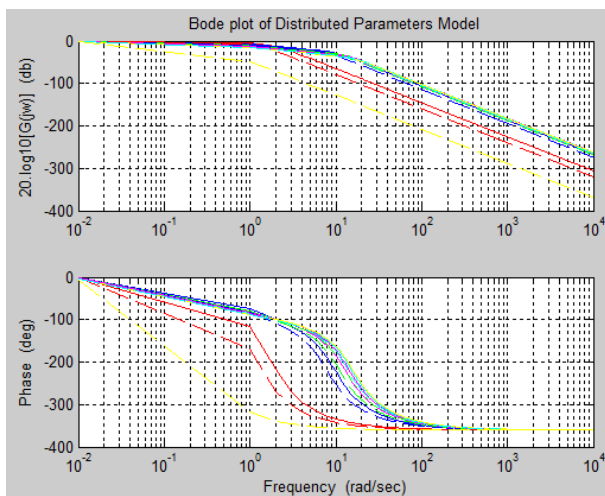
Фиг.6. Импулсна преходна функция



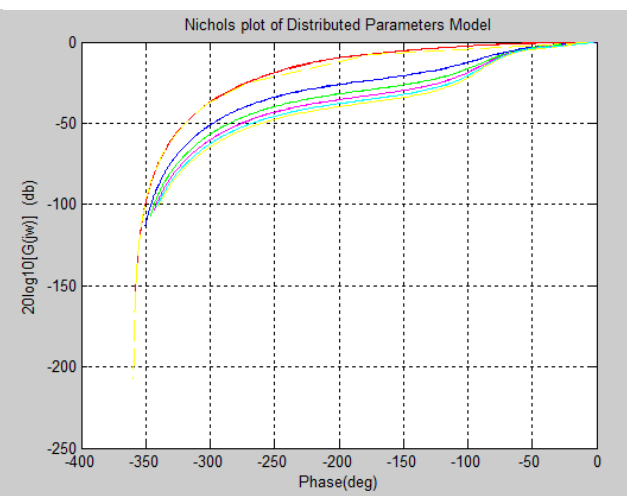
Фиг.7. Честотна характеристика



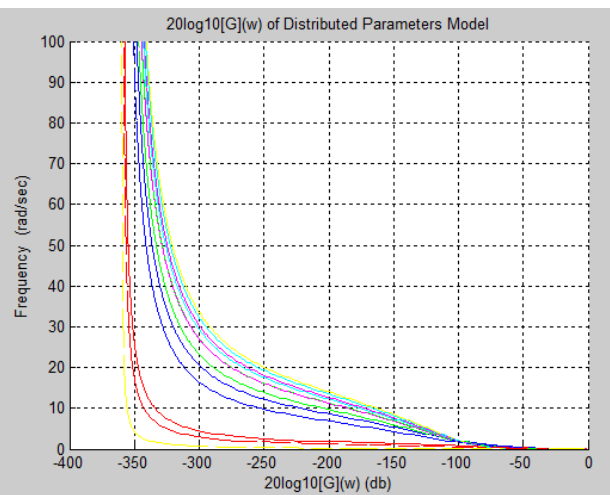
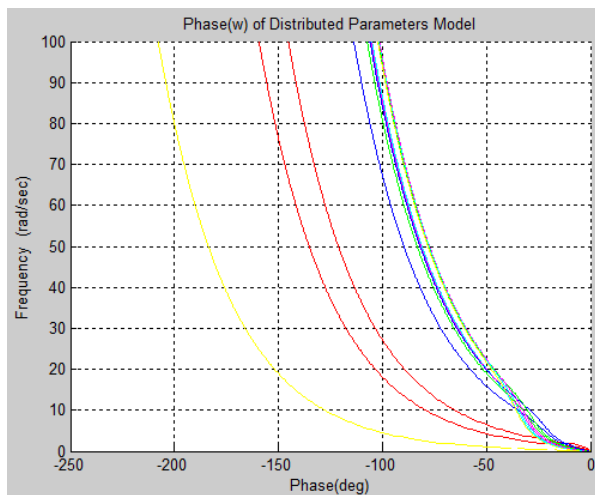
Фиг.8. Честотна характеристика на обекта



Фиг.9. Честотна характеристика на обекта



Фиг.10. Честотна характеристика



Фиг.11. Честотна характеристика на обекта    Фиг.12. Честотна характеристика

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата разработка е направено въведение в транспортните потоци. Представени са макроскопични модели за управление на трафик в автомагистрала. Показан е модел с разпределени параметри на пътния трафик в автомагистрала, използващ модела от първи ред LWR. Предложеният модел е симулиран като са показани преходните функции, импулсните преходни функции и *Nyquist*-, *Bode*- и *Nichols*- честотни характеристики за конкретни експлоатационни стойности на параметрите на входната рампа в автомагистрала.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Научните изследвания, резултатите от които са представени в настоящата публикация, са по договор № 132ПД0043-08 от 01.04.2013 на НИС на Технически Университет - София за научен проект „Изследване на възможностите на фрактални алгоритми в системите за управление на транспорт“ в помощ на докторанти

### ЛИТЕРАТУРА

- [Buisson 1996] Buisson C., Analyse bibliographique et première classification des algorithmes de simulation de l'écoulement du trafic routier, Recherches transports et sécurité, n° 53, p. 35-48, 1996
- [Cassidy 1998] Cassidy M.J., Bivariate relations in nearly stationary highway traffic flow, "Transportation research 32B (1)": 49-59, 1998
- [Chandler 1958] Chandler, R. E., R. Herman, and E. W. Montroll, (1958). Traffic Dynamics: Studies in Car Following, Opns. Res. 6, pp. 165-183.
- [Daganzo 1994] C.F. Daganzo, "The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory," Transportation Research Part B, vol. 28B, no. 4, pp. 269-287, 1994.
- [Daganzo 1995b] C.F. Daganzo, "Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow," Transportation Research Part B, vol. 29B, no. 4, pp. 277-286, 1995.



6. [Daganzo 1995c] C.F. Daganzo, "The cell transmission model, part II: Network traffic," *Transportation Research Part B*, vol. 29B, no. 2, pp. 79-93, 1995.
7. [Drake 1967] A Statistical Analysis of Speed Density Hypotheses. Drake, J. S. , J. L. Schofer, and A. D. May (1967). *Highway Research Record*, 154, pp. 53-87.
8. [Gartner 1984] N. H. Gartner, "Development of demand-responsive strategies for urban traffic control," in *Proceedings of the 11th IFIP Conf Syst. Modelling and Optimiz.* (P. Thoft-Christensen, ed.), pp. 166-174, New York: Springer-Verlag, 1984.
9. [Gartner 1998] Gartner N. H., Messer C. J. and A. Rathi. (1998). *Traffic Flow Theory: A State of the Art Report* . U.S. Project of : Department of Transportation Federal Highway Administration, Transportation Research Board, Oak Ridge National Laboratory, [www.tfhrc.gov/its/tft/tft.htm](http://www.tfhrc.gov/its/tft/tft.htm) trafficbook
- 10.[Greenberg 1959] Greenberg H., 1959 An analysis, of traffic flow, *Operations Research*, Vol. 7, No. 1 (Jan. - Feb., 1959), pp. 79-85, 1959
- 11.[Greenshields 1935] Greenshields B. D., 1935. A Study of Traffic Capacity. *Highway Research Board Proceedings* 14, p. 448-477.
- 12.[Helbing 1995] D., "High-fidelity macroscopic traffic equations," *Physica A*, vol. 219, pp. 391-407, 1995
- 13.[Helbing 1996b] Helbing, D. (1996). Gas-kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations. *Physical Review E* 53(3), 2266-2381.
14. [Helbing 1999a] D. Helbing, "Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model," *Physical Review E*, vol. 59, no. 1, pp. 239-253, 1999.
- 15.[Helbing 1999b] D. Helbing, A. Hennecke, and M. Treiber, "Phase diagram of traffic states in the presence of inhomogeneities," *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 21, pp. 4360-4363, May 1999.
- 16.[Helbing 1999c] D. Helbing and M. Schreckenberg, "Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow," *arXiv:cond-mat/9812300v2*, 21 Mar 1999.
- 17.[Lighthill 1955] Lighthill, M. J. and G. B. Whitham, (1955). *On Kinematic Waves: I: Flow movement in long rivers, II: A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads*. *Proceedings of the Royal Society: A229*, London.
- 18.[Nikolov 2010] Nikolov E. *Robust Fractional Control ( Approaches Predictive and Algebraic, Distributed Parameters Control Systems )*, Sofia 2010
- 19.[Papageorgiou 1997] Papageorgiou M., H. Haj-Salem, and F. Middelham, "ALINEA local ramp metering: Summary of field result," in *Proceedings of the 76th Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington, D.C., 1997.
- 20.[Papageorgiou 1998a] Papageorgiou M., "Some remarks on macroscopic traffic flow modelling," *Transportation Research Part A*, vol. 32, no. 5, pp. 323-329, 1998.]
- 21.[Payne 1971] HJ. Payne, "Models of freeway traffic and control," *Simulation Council Proceedings*, no. 1, pp. 51-61, 1971.

22.[Pipes 1967] Pipes, L.A., 1967. Car following models and the fundamental diagram of road traffic. Transportation Research 1, 21–29. doi:10.1016/0041-1647(67)90092-5

23.[Richards 1956] P.I. Richards, "Shock waves on the highway," Operations Research, vol. 4, pp. 42-57, 1956.

**Автори:** Василка Стоилова, маг. инж. докторант; Емил Николов, проф. дтн, катедра „Автоматизация на Непрекъснатите Производства”, Факултет Автоматика, Технически Университет - София, E-mail addresses:

[vassilka\\_stoilova@hotmail.com](mailto:vassilka_stoilova@hotmail.com); [nikoloff@tu-sofia.bg](mailto:nikoloff@tu-sofia.bg)

**Постъпила** на 23.04.2014

**Рецензент** доц. д-р Н. Г. Николова