

## СХЕМАТИЗАЦИЯ НА ПРОЦЕСА НА ИЗСЛЕДВАНЕ ПЛАВНОСТТА НА ДВИЖЕНИЕ ЗА ДВУ, ТРИ И МНОГООСНИ ЕДНОЗВЕННИ ТРАНСПОРТНИ СРЕДСТВА С ОТЧИТАНЕ ОКАЧВАНЕТО НА НАДПОДРЕСОРЕНИТЕ МАСИ

### ЧАСТ I

Лило КУНЧЕВ

Красимир НЕДЕЛЧЕВ

[Lkunchev@tu-sofia.bg](mailto:Lkunchev@tu-sofia.bg)[Krasined@tu-sofia.bg](mailto:Krasined@tu-sofia.bg)

катедра "ДАТТ", Технически университет – София, 1000, БЪЛГАРИЯ  
 катедра "ДАТТ", Технически университет – София, 1000, БЪЛГАРИЯ

*Статията разглежда един клас колесни транспортни системи, чието движение се описва със система матрични уравнения от вида  $M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F(t)$ . В работата се прави структурен анализ на организирането на елементите на матриците  $M$ ,  $B$  и  $C$  се доказва съществуването на аналитични зависимости, определящи техните елементи. Тези зависимости са в основата на създаване на алгоритъм, даващ възможност чрез въвеждане на входните параметри на транспортната система (напр. автомобил) да се получават диференциалните уравнения на движение на системата без те да бъдат извеждани.*

*Ключови думи: динамика, транспортно средство, плавност на движение, моделиране*

#### 1. Увод

Автомобилът е сложна механична система, състояща се от голям брой маси с различни по характер връзки между тях. При изучаване законите на движение на тези маси се използва понятието "степен на свобода" под което се разбира броя на независимите премествания на отделните елементи на системата. Обикновено при изследване плавността на движение на автомобила самите елементи се разглеждат като твърди тела.

Най-често движението на механичните системи се описва със системи диференциални уравнения от втори ред, като броя на уравненията отговаря на броя степени на свобода.

Степента на сложност при описване трептенията на автомобила, тоест включването в разглежданата механична система на по-голям или по-малък брой степени на свобода зависи от характера на задачата която се решава. Например за приблизителни инженерни изследвания, използваните модели са главно равнинни и не включват в себе си повече от 5-6 степени на свобода за еднозвонни транспортни средства. При автомобили работещи в състава

на автоvlak равнинните модели достигат до 8-10 и повече степени на свобода.

Теориите, разглеждащи плавността на движението на автомобилите обикновено разделят масите им на две основни групи - подресорени и неподресорени.

Групата на подресорените маси включва всички елементи, чиято сила тегло се предава чрез главните еластични елементи (ресор, пружина, торсион и др.) на конкретната система на окачване. Към тази група принадлежат – купето, рамата, монтираните върху тях агрегати (напр. силово предаване, седалките с пътниците и водача и др.), както и част от елементите на окачването които имат общи връзки с рамата или купето. Групата на подресорените маси се разглежда от авторите по два начина: като сбор от отделните маси на елементите в нея, като се пренебрегнат еластичните връзки между тях или като система с много степени на свобода, отчитайки съответните еластични, демпфращи и кинематични връзки.

Групата на неподресорените маси включва всички маси под главния еластичен елемент и към нея се правят същите разглеждания каквито бяха описани по-горе.

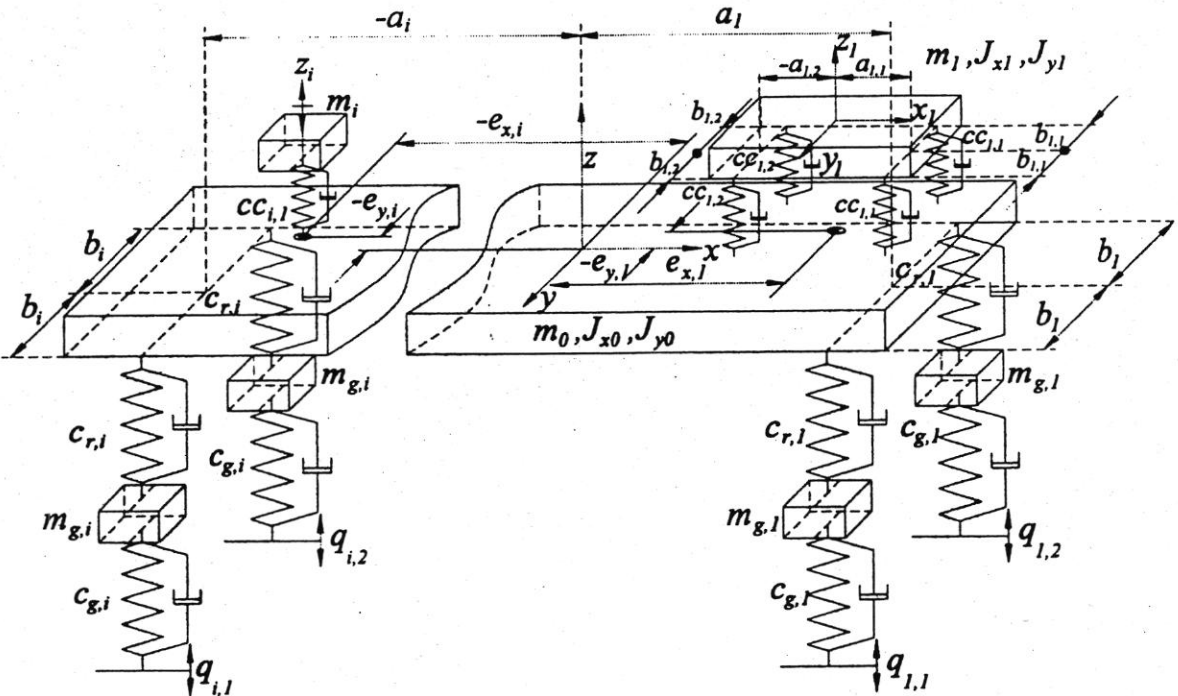
Анализа при отчитане на броя на масите и еластичните връзки между тях води до увеличаване на броя на степените на свобода за описваните системи на автомобила. Така например ако в масовия център на купето на автомобила (подресорените маси) се разположи началото на координатна система  $Oxyz$ , то за него са отчетени три премествания по координатните оси и три завъртания около тях. Ако в същата система отчетем влиянието на неподдресорените маси то броя на степените на свобода значително ще нарасне.

**1. Механо - математичен модел на еднозвено транспортно средство.**

При изследване динамичното поведение на агрегатите закрепени към рамата или купето на автомобила, а така също влиянието на трептенията върху водача, пътниците и товарите в първо приближение най-често използваните схеми са две - с едноточково и четириточково окачване на същите фиг.1.

премествания. В масовия център на всеки един от елементите са разположени координатни оси успоредни на оста  $Oz$ ;

- не се отчита влиянието на моментите от силното задвижване върху колелата;
- подресорените маси условно са разделени на "основна" (рама, купе) и "допълнителна" (силиви агрегати, седалки с пътници и др.), еластично окачени върху основната (наречени надподресорени);
- в масовите центрове на основната и допълнителните подресорени маси са разположени началата на координатни системи. В масовия център на основната подресорена маса е поставена координатната система  $Oxyz$ . Тук се отчитат преместването по оста  $Oz$ , завъртането по оста  $Oy$  (галопиране) и завъртането по оста  $Ox$  (страничен крен). Не се отчита влиянието на надлъжните и напречните трептения. Допълнителните подресорени маси са разделени на три основни типа в зависимост от това с колко еластични връзки са свързани



Фиг.1. Пространствена структурна схема на многоосно транспортно средство.

Настоящите изследванията са извършени при следните допускания и ограничения:

- изследванията се отнасят за еднозвено колесната транспортна машина, имаща надлъжна равнина на симетрия на еластичните и демпфиращите характеристики на опорите на подресорената маса от системата;
- неподдресорените маси са съсредоточени в оста на колелата и извършват само вертикални

към основната - с една, четири или повече (вж.фиг.1). За масите с една еластична връзка се отчита само преместването им по ос  $Oz_i$  успоредна на оста  $Oz$ , а при тези с четири и повече,  $cc_{i,j}$  еластични връзки се включва и завъртането по оси  $Oy_i$  и  $Ox_i$ ; успоредни на  $Oy$  и  $Ox$ ;

- рес  
сим  
хар  
-  
едн  
-  
по  
по  
екс  
це  
пол  
кос  
-  
ста  
-  
ока  
-  
счи  
-  
не  
на  
по

мн  
съ  
не  
пр  
ма  
е  
си  
ма  
по  
е  
ос  
съ  
O  
на  
са  
пр  
съ  
П  
ур

(1)

дв  
ви

(2)

- многоопорните допълнителни (надподресорени) маси имат надлъжна равнина на симетрия на еластичните и демпфиращите характеристики на опорите им;
- надлъжните равнини на симетрия на всяка една от масите минава през масовия и център;
- разположението на допълнителните подресорени маси в равнината на основната подресорена маса се определя с разстоянията на ексцентрицитет  $e_{x_i}$  и  $e_{y_i}$  на техните масиви центри. Знакът на същите се определя от положението им спрямо началото на координатната система на основната маса;
- не се отчита влиянието на напречния стабилизатор;
- не се отчита влиянието и кинематиката на качването на ТС;
- задачата се разглежда в линейна постановка, счита се че движенията на системата са малки;
- еластичните и демпфиращи връзки между неподресорените, подресорените и надподресорените маси са само във вертикална посока и са последователни.

На фиг.1. е показана обща схема на многоосен автомобил. В осите на колелата му са съсредоточени припадащите се части от неподресорените маси. Също там са показани преместванията, които тези маси извършват. В масовия център на основната подресорена маса е съсредоточена пространствена координатна система  $Oxyz$ . Върху основната подресорена маса условно са показани две допълнителни подресорени маси разположени на разстояние  $e_{x_1}$ ,  $e_{y_1}$  и  $e_{x_2}$ ,  $e_{y_2}$  спрямо масовия център на основната. В масовите им центрове са съсредоточени локалните координатни системи  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$ . В случая на едноопорна надподресорена маса тя може да се представи само с оста  $O_2z_2$ , тъй като има само вертикални премествания.

За показаната механична схема са получени съответните енергии  $E, U$  и  $R$  (Кинетична, Потенциална и функция на Релей) и прилагайки уравненията на Лагранж от II род

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

се получават диференциалните уравнения на движение, чийто най-общ матричен запис има вида

$$(2) \quad M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F(t).$$

По нататък към система (2) се прилагат процедури за нейното нормализиране и привеждането и в по-нисък ред. Тя добива вида

$$(3) \quad \dot{y} + Ly = Y,$$

$$\text{където} \quad L = \begin{bmatrix} M^{-1}B & M^{-1}C \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{а}$$

$$Y = \begin{bmatrix} M^{-1}F(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

От матрицата  $L$  може да се получат собствените честоти на трептене на механичната система, а чрез използването на някои от числените методи може да се получат и формите на законите на движението на отделните компоненти.

От казаното по-горе следва, че ако са известни матриците  $M, C$  и  $B$  (инерционна, еластична, демпфираща), то търсенето на решение за системата (2) има формален характер и е въпрос на умения свързани с използването на съответен програмен продукт.

*Целта на настоящата работа е да се представи подход, чрез който да се формализира (автоматизира) процеса на търсене на система диференциални уравнения (формиране на матриците  $M, C$  и  $B$ ), описващи поведението на един клас механични системи съгласно направените ограничения отговарящи на фиг.1.*

Ако изводите на уравненията за разглежданата система фиг.1 бъдат направени в следната последователност (план на експеримента):

- четириопорна схема – шестопорна схема – много опорна схема;
- без допълнителна подресорена маса – с една допълнителна подресорена маса – с две и повече допълнителни подресорени маси и т.н., то използвайки принципа на математическата индукция се забелязва, че инерционната, еластичната и матрицата на нелинейните съпротивления образуват своите членове по определен ред и се подчиняват на сравнително симетрични зависимости.

За да бъде извършен анализ на начина по който се попълват отделните клетки на матриците ще бъдат разгледани инерционната и еластичната такива. При изграждането на матриците се описват първо всички надресорени много опорни маси след което всички едно опорни, основната подресорена маса и последни неподресорените маси. По този начин се формира матрица в която всяка една от

подматриците характеризира по строго определен начин механичната система.

**1.1. Особенности при образуването на инерционната матрица  $M$  за разглежданият вид механични системи.**

Общия вид на инерционната матрица  $M$  за разглежданата механична система представена на фиг.1. може да се представи във вида (4).

$$(4) \begin{bmatrix} [m_{11}] & [m_{12}] & [m_{13}] \\ [m_{21}] & [m_{22}] & [m_{23}] \\ [m_{31}] & [m_{32}] & [m_{33}] \end{bmatrix}$$

Тук  $[m_{i,j}]$  са подматрици всяка от които образува своите членове в зависимост от сложността на механичната система (брой на опорите на транспортното средство, брой и вид на допълнителни подресорени маси, особености на връзките между масите и др.). Матрицата  $M$  е симетрична спрямо главния диагонал, т.е. под матрицата  $[m_{i,j}] = [m_{j,i}]^T$ . В конкретния случай за разглежданият вид механични системи тя е и диагонална т.е. матриците  $[m_{i,j}]$  са нулеви.

Подматриците  $[m_{ii}]$  отразяват особеностите и връзките между телата в разглежданият вид механични системи където:  $[m_{11}]$  е инерционна подматрица отразяваща вида на надресорените маси;  $[m_{22}]$  е инерционна подматрица отразяваща вида на подресорената маса;  $[m_{33}]$  е инерционна подматрица отразяваща вида на неподресорените маси;

Размера на инерционната матрица  $M$  е от вида  $M[(pp.nn+n+p+q) \times (pp.nn+n+p+q)]$ . Тук "p" е броя на степените на свобода на основната подресорена маса, "pp" е броя на степените на свобода на многомасовите надподресорени маси, "q" е брой на мостовете на транспортното средство, "n" е брой надподресорени маси на една опора, а "nn" е брой надподресорените маси с четири и повече опори. Степените на свобода на основната подресорена маса и на многомасовите надподресорени маси, се приема един и същ за всички. В общия случай те са равни помежду си и приемат основно стойности 2 или 3.

Размерностите на отделните подматрици изграждащи матрицата  $M$  зависят от броя на отделните маси участващи в системата и се получават от зависимостите:

$$m_{11}[(pp.nn+n) \times (pp.nn+n)], \quad m_{12}[(pp.nn+n) \times (p)], \\ m_{13}[(pp.nn+n) \times (q)], \quad m_{22}[(p) \times (p)], \quad m_{23}[(p) \times (q)], \\ m_{33}[(q) \times (q)].$$

Всяка една от подматриците отразява характерни особености на механичните системи от разглеждания вид. Независимо от броя на степените на свобода на конкретната системата която ще разглеждаме. В зависимост от конкретния случай, някои от матриците могат да отпаднат. Така например, ако нямаме надподресорени маси, няма елементи които да образуват матрицата  $[m_{11}]$  и тя както и матриците  $[m_{12}]$  и  $[m_{21}]$ , отпадат от матрицата (4). В този случай масовата матрица придобива вида (5).

$$(5) \begin{bmatrix} [m_{22}] & [m_{23}] \\ [m_{32}] & [m_{33}] \end{bmatrix}$$

Подматрицата  $[m_{22}]$  представлява инерционната матрица  $M$  за случая когато не отчитаме влиянието на неподресорените маси и подресорените маси се разглеждат като една. Нейната размерност е  $m_{22}[(p) \times (p)]$ , а при три степени на свобода за основната подресорена маса е  $[m_{22}] = [3,3]$ .

За разглежданият вид механични системи ненулеви са само подматриците  $[m_{11}]$ ,  $[m_{22}]$  и  $[m_{33}]$ . Процеса на генериране и запълване на масовата матрица  $M$  изисква матриците  $[m_{11}]$  и  $[m_{22}]$  да се разделят на подматрици. Елементите на всяка една от матриците  $[mn]$  и  $[mg]$  се състоят условно от параметри само на една от масите от системата (маса, инерционен момент).

Инерционната матрица  $M$  при транспортно средство с два моста ( $2.q=4$ ), на което са поставени една едноопорна и една четириопорна ( $pp=3$ ) надподресорена маса е с размерност  $M[1+3.1+3+4, 1+3.1+3+4] = M[11,11]$  и има вида посочен по долу.

$$(8) \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{x0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y0} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{g1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

където  $m_{g1}$  и  $m_{g2}$  са неподресорените маси на колелата на предният и заден мост;

$m_1, m_2$  – надподресорени маси на транспортното средство, могат да бъдат произволно голям брой, но това води до увеличаване на размера на матриците респективно нараства изчислителния процес;

$m_0$  – подресорена маса на транспортното средство;

$J_{x1}$  – инерционен момент на първата надподресорена маса около надлъжната и ос  $O_1x_1$ ;

$J_{y1}$  – инерционен момент на първата надподресорена маса около напречната и ос  $O_1y_1$ ;

$J_{x0}$  – инерционен момент на подресорената маса около надлъжната и ос  $Ox$ ;

$J_{y0}$  – инерционен момент на подресорената маса около напречната и ос  $Oy$ ;

Инерционната матрица  $[m_{11}]$  за случая когато имаме една четириопорна надподресорена маса и една едноопорна, има вида

$$(9) \quad m_{11} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

От (9) се вижда, че параметрите от системата заградени с пунктирна линия са с еднакви индекси, което показва, че са от една и съща маса. Разделена по този начин матрица  $[m_{11}]$  може да се разглежда като диагонална матрица от вида:

$$(10) \quad \begin{bmatrix} [mn_{11}] & [mn_{12}] \\ [mn_{21}] & [mn_{22}] \end{bmatrix}$$

на база на различният характер на движенията които извършват надподресорените маси тя може да се представи във вида (10). В конкретния случай тя е диагонална матрица, чийто диагонал е съставен от две под матрици  $[mn_{11}]$  и  $[mn_{22}]$ . Другите две матрици  $[mn_{12}]$  и  $[mn_{21}]$  са нулеви и  $[mn_{12}] = [mn_{21}]^T$ . Матрицата  $mn_{11}$  се образува от многоопорните маси, които извършват транслационни и въртеливи движения, а  $mn_{22}$  само транслационни движения по ос  $O_2z_2$  успоредна на оста  $Oz$  от основната координатна система. Матриците  $[mn_{11}]$  и  $[mn_{22}]$  отразяват връзката между двете надподресорени маси. Отсъствието на непосредствено свързване помежду им определя нулевите елементи на тези матрици. При поставяне на връзка помежду им,

в зависимост от вида на връзката някои или всичките им елементи приемат определени числени стойности.

Видът на подматриците на многоопорните маси е аналогичен на  $[mn_{11}]$ , а на едноопорните на  $[mn_{22}]$ . Различават се само по индекса на елементите в матриците които отговаря на поредният номер на надресорената масата, която се описва от дадената матрица  $[mn_{ii}]$ . Индексът  $i$  е променливата която определя номера на произволна надресорена маса от системата и може да приема стойности от  $1 \dots nn+n$ .

В общият случай за  $nn$  на брой многоопорни и  $n$  на брой едноопорни надподресорени маси инерционната матрица  $[m_{11}]$ , представена чрез матриците  $[mn_{ii}]$ , може да се представи във вида

$$(11) \quad \begin{bmatrix} [mn_{11}] & \dots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & \dots & [mn_{nn+n,nn+n}] \end{bmatrix}$$

където  $[mn_{11}]$  е инерционната матрица на многоопорната надподресорената маса с номер едно;  $[mn_{ii}]$  е инерционната матрица на  $i$ -та надподресорената маса, в случая многоопорна;  $[mn_{nn,nn}]$  е инерционната матрица на последната многоопорна надподресорената маса с номер  $nn$ ;  $[mn_{nn+n,nn+n}]$  е инерционната матрица на последната едноопорна надподресорената маса с номер  $nn$ . Всички матрици от  $[mn_{nn+1,nn+1}]$  до  $[mn_{nn+n,nn+n}]$ , които определят едноопорните надподресорни маси се състоят от по един елемент.

Инерционната матрица  $[m_{22}]$ , е с размер  $[p] \times [p]$  които не зависи от останалите маси на системата, а само от степените на свобода на подресорената маса. При три степени на свобода матрицата има вида

$$(12) \quad m_{22} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{x0} & 0 \\ 0 & 0 & J_{y0} \end{bmatrix}$$

Инерционната матрица  $[m_{33}]$ , е с размер  $[q] \times [q]$  които зависи единствено от броя на мостовете на транспортното средство. При два моста матрицата има вида

$$(13) \quad m_{33} = \begin{bmatrix} m_{g1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{g1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{g2} \end{bmatrix}$$

При групиране на елементите на матрицата на  $[m_{33}]$  по мостове както е показано в (13) с пунктирана линия, може да се представи във вида (15). В конкретния случай тя е диагонална матрица, чийто диагонал е съставен от две подматрици  $[mg_{11}]$  и  $[mg_{22}]$ . Другите две матрици  $[mg_{12}]$  и  $[mg_{21}]$  са нулеви и  $[mg_{12}] = [mg_{21}]$ . Матрицата  $mg_{11}$  се образува от неподресорените маси на двете предни колела на транспортното средство, които в случая са приети за равни. В противен случай двата елемента от диагонала на матрицата  $[mg_{11}]$  ще бъдат различни. Матрицата  $mg_{22}$  се образува от неподресорените маси на двете задни колела на транспортното средство.

$$(14) \quad \begin{bmatrix} [mg_{11}] & [mg_{12}] \\ [mg_{21}] & [mg_{22}] \end{bmatrix}$$

Връзките на неподресорените маси с подресорената маса са еднакви за всички мостове.

В общият случай за  $q$  на брой моста на транспортното средство инерционната матрица  $[m_{33}]$  от (4), представена чрез матриците  $[mg_{ii}]$ , може да се представи във вида (15).

$$(15) \quad \begin{bmatrix} [mg_{11}] & \dots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & \dots & [mg_{m,m}] \end{bmatrix}$$

**1.2. Особенности при образуването на еластичната матрица  $C$  за разглежданият вид механични системи.**

Аналогично на инерционната матрица  $M$ , общият вид на еластичната матрица  $C$  за разглежданата механична система представена на фиг. 1. може да се представи във вида

$$(16) \quad \begin{bmatrix} [c_{11}] & [c_{12}] & [c_{13}] \\ [c_{21}] & [c_{22}] & [c_{23}] \\ [c_{31}] & [c_{32}] & [c_{33}] \end{bmatrix}$$

Тук  $[c_{i,j}]$  са подматрици всяка от които образува своите членове в зависимост от сложността на механичната система (брой на опорите на транспортното средство, брой и вид на допълнителни подресорени маси). Матрицата  $C$  е симетрична спрямо главния диагонал, т.е. под матрицата  $[c_{i,j}] = [c_{j,i}]^T$ .

Размера на еластичната матрица  $C$  е от вида  $C[(pp.nn+n+p+q) \times (pp.nn+n+p+q)]$ .

Размерностите на отделните подматрици изграждащи матрицата  $C$  зависят от броя на отделните маси участващи в системата и се получават от зависимостите:  $c_{11}[pp.nn+n] \times [pp.nn+n]$ ,  $c_{12}[pp.nn+n] \times [p]$ ,  $c_{13}[pp.nn+n] \times [q]$ ,  $c_{22}[p] \times [p]$ ,  $c_{23}[p] \times [q]$ ,  $c_{33}[m] \times [q]$ .

Подматриците отразяват особеностите и връзките между телата в разглежданият вид механични системи както следва:

$[c_{22}]$  – подматрици отразяваща връзките между подресорената маса с надподресорени и неподресорените маси;

$[c_{11}]$  – подматрица отразяваща вида на надподресорените маси;

$[c_{12}]$ ,  $[c_{21}]$  – подматрици отразяващи разположението на надподресорените маси спрямо масовия център на основната подресорена маса;

$[c_{13}]$ ,  $[c_{31}]$  – подматрици отразяваща връзките между надподресорени и неподресорените маси, тъй като в случая няма връзки те са нулеви матрици;

$[c_{23}]$ ,  $[c_{32}]$  – подматрици отразяваща връзките между подресорената маса с неподресорените маси;

$[c_{33}]$  – подматрици отразяваща връзките на неподресорените маси с подресорената маса и пътните неравности (външните въздействия).

Всяка една от подматриците отразява характерни особености на механичните системи от разглеждания вид, независимо от броя на степените на свобода на конкретната системата която се разглежда. В зависимост от конкретния случай, някои от матриците могат да отпаднат. Така например, ако не се отчита влиянието на неподресорените маси и подресорените маси, еластичната матрица  $C$  на механичната система се описва само от подматрицата  $[c_{22}]$ . Нейната размерност е  $c_{22}[p] \times [p]$ , а при три степени на свобода за основната подресорена маса е  $[c_{22}] = [3] \times [3]$ .

Ако нямаме надподресорени маси или те са твърдо свързани с основната подресорена маса, няма елементи които да образуват матрицата  $[c_{11}]$  и тя както и матриците  $[c_{12}]$  и  $[c_{21}]$ , отпадат от матрицата (16). В този случай масовата матрица придобива вида

(17)

3

мат

мат

генс

C и:

$[c_{33}]$

на в

от

сист

елас

над

мат

над

съдн

на о

Е

има

и ед

(18)

О

сист

една

една

матр

диаг

(19)

Н

матр

(20)

В

на де

Член

$$(17) \begin{array}{|c|c|} \hline [c_{22}] & [c_{32}] \\ \hline [c_{32}] & [c_{33}] \\ \hline \end{array}$$

За разглежданият вид механични системи в матрицата  $C$  само две  $[c_{13}]$  и  $[c_{31}]$ , от деветте под матриците са нулеви. Процеса на автоматично генериране и запълване на еластичната матрица  $C$  изисква матриците  $[c_{11}]$ ,  $[c_{12}]$ ,  $[c_{21}]$ ,  $[c_{23}]$ ,  $[c_{32}]$ , и  $[c_{33}]$ , да се разделят на подматрици. Елементите на всяка една от матриците  $[cn]$  и  $[cg]$  се състоят от параметри само на една от масите от системата (еластичност, координати на еластичностите и на масовите центрове на надподресорените маси). С  $[cn]$  са обозначени матриците в които се съдържат параметри на надподресорените маси, а с  $[cg]$  тези в които се съдържат параметри на неподресорените маси и на окачването на подресорената маса.

Еластичната матрица  $[c_{11}]$  за случая когато имаме една четириопорна надподресорена маса и една едноопорна, има вида

$$(18) \begin{bmatrix} 2(cc_{11} + cc_{12}) & \dots \\ 0 & \dots \\ 2(cc_{11}a_{11} + cc_{12}a_{12}) & \dots \\ 0 & \dots \end{bmatrix}$$

От (18) се вижда, че параметрите от системата заградени с пунктирна линия са с еднакви първи индекси, което показва, че са от една и съща маса. Разделена по този начин матрица  $[c_{11}]$  може да се разглежда като диагонална матрица от вида:

$$(19) \begin{array}{|c|c|} \hline [cn_{11}] & [cn_{12}] \\ \hline [cn_{21}] & [cn_{22}] \\ \hline \end{array}$$

Най – общо за  $m+n$  надподресорени маси матрицата  $[c_{11}]$  може да се представи във вида:

$$(20) \begin{array}{|c|c|c|} \hline [cn_{11}] & \dots & [0] \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline [0] & \dots & [0] \\ \hline \vdots & \dots & \vdots \\ \hline [0] & \dots & [0] \\ \hline \vdots & \dots & \vdots \\ \hline [0] & \dots & [cn_{nn+n,nn+n}] \\ \hline \end{array}$$

Вижда се, че тя може да се представи във вид на диагонална матрица с размер  $[nn+n] \times [nn+n]$ . Членовете от диагонала на която са подматрици

с размерност  $[pp] \times [pp]$  за многоопорните надподресорени маси в дадения случай  $[3] \times [3]$  и  $[1] \times [1]$  за едноопорните маси. С  $cn_{i,j}$  е обозначена под матриците на  $i$ -тата надподресорена маса (много или едноопорна).

Обобщеният запис на подматриците  $cn_{i,j}$  има една от посочените по долу форми в зависимост от това дали е едноопорна или многоопорна надподресорената маса.

При  $i \leq nn$  матрицата приема вида

$$(21) \quad cn_{i,j} = 2 \begin{bmatrix} (cc_{i,1} + \dots + cc_{i,nci}) & \dots \\ 0 & \dots \\ (cc_{i,1}a_{i,1} + \dots + cc_{i,2}a_{i,nci}) & \dots \end{bmatrix},$$

а при  $i > nn$   $cn_{i,j} = [cc_{i,1}]$ .

Под матриците на многомасовите надресорени маси имат вид аналогичен на матрицата на подресорените маси когато е без неподресорени и надресорени маси както е показана в [Кунчев и др.2003]. Докато члена на едноопорните маси представлява коефициента им на еластичност на еластичната връзка с подресорената маса  $cc_{i,j}$ . В подматрицата на много опорните надресорени маси са използвани следните обозначения:

$nci$  – половината от опорите на  $i$ -тата многоопорна надподресорена маса;

$a_{i,1}$  – разстояние от масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса, до първата и опора по надлъжната ос X;

$b_{i,1}$  – разстояние от масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса, до първата и опора по напречната ос Y;

$a_{i,nci}$  – разстояние от масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса, до последната и опора по надлъжната ос X;

$b_{i,nci}$  – разстояние от масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса, до последната и опора по напречната ос Y;

$cc_{i,1}$  – коефициент на еластичност на първия еластичен елемент от  $i$ -тата надподресорена маса;

$cc_{i,nci}$  – коефициент на еластичност на последния еластичен елемент от  $i$ -тата надресорена маса;

Еластичната матрица  $[c_{12}]$  за случая когато имаме една четири опорна надподресорена маса и една едно опорна, има вида

$$(22) \begin{bmatrix} -2(cc_{11} + cc_{12}) & \dots \\ 0 & \dots \\ -2(cc_{11}a_{11} - cc_{12}a_{12}) & \dots \\ -cc_{21} & \dots \end{bmatrix}$$

където  $e_{x1}$  и  $e_{x2}$  са разстоянията от масовия център на тялото на ТС до масовия център на 1-вата и 2-рата надподресорени маси по надлъжната ос X, а  $e_{y1}$  и  $e_{y2}$  разстоянията от масовия център на тялото на ТС до масовия център на 1-вата и 2-рата надподресорени маси по напречната ос Y;

Еластичната матрица  $C$  е симетрична спрямо главния диагонал от това следва, че  $[c_{21}] = [c_{12}]^T$ .

Матрицата (22) може да се разглежда като матрица вектор стълб (23) елементите на които са две подматрици.

$$(23) \quad \begin{bmatrix} [cn_{13}] \\ [cn_{23}] \end{bmatrix}$$

Под матрицата  $[cn_{13}]$  отразява разположението на многоопорните надподресорените маси спрямо масовия център на основната подресорена маса, а на едноопорните от под матрицата  $[cn_{23}]$ . Те определят вида на подматриците  $[cn_{i,nn+n+1}]$  в зависимост от вида на надподресорената маса. Различават се само по първия индекса на матриците  $[cn_{i,nn+n+1}]$  и на елементите в нея, които отговаря на поредният номер на надподресорената масата, която се описва от дадената матрица.

Най-общо за  $n+nn$  надподресорени маси матрицата  $[c_{12}]$  може да се представи във вида

$$(24) \quad \begin{bmatrix} [cn_{1,nn+n+1}] \\ \vdots \\ [cn_{i,nn+n+1}] \\ \vdots \\ [cn_{nn,nn+n+1}] \\ \vdots \\ [cn_{nn+n,nn+n+1}] \end{bmatrix}$$

На тази база можем да запишем обобщеният вид на матрицата  $cn_{i,nn+n+1}$  за  $i$ -тата многоопорна надподресорена маса с  $cn_i$  на брой еластични елементи, като при  $i \leq nn$  матрицата приема вида.

$$(25) \quad cn_{i,nn+n+1} = -2 \begin{bmatrix} (cc_{i,1} + \dots + cc_{i,nci}) & \dots \\ 0 & \dots \\ (cc_{i,1}a_{i,1} + \dots + cc_{i,nci}a_{i,nci}) & \dots \end{bmatrix}$$

Съответно обобщеният вид на матрицата  $cn_{i,nn+n+1}$  за  $i$ -тата едноопорна надподресорена маса при  $i > nn$  матрицата приема вида.

$$cn_{i,nn+n+1} = \begin{bmatrix} -cc_{i,1} & cc_{i,1}e_{y1} & cc_{i,1}e_{x1} \end{bmatrix},$$

където  $e_{xi}$  са разстоянието от масовия център на тялото на ТС до масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса по надлъжната ос X, а  $e_{yi}$  е разстоянието от масовия център на тялото на ТС до масовия център на  $i$ -тата надподресорена маса по напречната ос Y.

Матрицата на еластичност  $[c_{13}] = [c_{31}]^T$ , която отразява наличието на пряка еластична връзка между надподресорени и неподресорените маси, е нулева за разглежданият вид механични системи. Това е резултат от отсъствието на такива връзки.

Еластичната матрица  $[c_{22}]$  за случая когато имаме една четириопорна надподресорена маса и една едноопорна, на двусно транспортно средство има вида

$$(26) \quad c_{22} = \begin{bmatrix} 2(c_{r1} + c_{r2}) + \\ 2(cc_{11} + cc_{12}) + \dots \\ cc_{21} \\ \\ 2e_{y1}(cc_{11} + cc_{12}) + \dots \\ e_{y2}cc_{21} \\ \\ 2(c_{r1}a_1 + c_{r2}a_2) + \\ 2[cc_{11}(e_{x1} + a_{11}) + \dots \\ cc_{12}(e_{x1} + a_{12})] + \dots \\ cc_{21}e_{x2} \end{bmatrix}$$

Подматрицата  $c_{22}$  е централна за матрицата на еластичност  $C$  и е симетрична спрямо главния диагонал. Тя отразява връзката между отделните маси на системата, които са непосредствено свързани с нея. Еластичните константи на гумите, когато имаме неподресорени маси поради отсъствието на пряка връзка с подресорената маса не участват в матрицата  $[c_{22}]$ .

Тъй като тя не може да се раздели на под матрици представянето и посредством под матриците  $[cn]$  има вида  $[c_{22}] = [cn_{nn+n+1,nn+n+1}]$ .

Матрицата  $[c_{23}]$  отразява влиянието на окачването върху механичната система. Размерът и се определя от броя на мостовете на транспортното средство. Еластичната матрица  $[c_{23}]$  за случая когато имаме двусно транспортно средство има вида (27). Видът на матрицата е за случая когато имаме независимо окачване на отделните мостове, както е показано на фиг. 1.



$$(27) \quad c_{23} = \begin{bmatrix} -c_{r1} & -c_{r1} & -c_{r2} & -c_{r2} \\ c_{r1}b_1 & -c_{r1}b_1 & c_{r2}b_2 & -c_{r2}b_2 \\ -c_{r1}a_1 & -c_{r1}a_1 & -c_{r2}a_2 & -c_{r2}a_2 \end{bmatrix}$$

където  $c_{r1}$  е коефициента на еластичност на ресорите на предните колела;  $c_{r2}$  е коефициента на еластичност на ресорите на задните колела;  $a_1$  и  $a_2$  са разстоянията от масовия център на тялото на ТС до масовия център на 1-вата и 2-вата неподресорени маси по надлъжната ос X;  $b_1$  и  $b_2$  разстоянията от масовия център на тялото на ТС до масовия център на 1-вата и 2-вата неподресорени маси по напречната ос Y.

Разстоянията  $a_1$  и  $a_2$  се вземат със знака определен от положението им спрямо нулата на координатната система  $Oxyz$ . В конкретния пример на фиг. 1.  $a_1$  е с положителен знак, а ако приемем  $a_1 = a_2$ , то  $a_2$  е с отрицателен знак. Отрицателният знак на някои от надлъжните разстоянията  $a$  определя промяна на знака елементите на матрицата  $[c_{23}]$  в изразите на които участва разстоянието  $a$  с отрицателен знак. Разстоянията  $b$  се вземат винаги с положителен знак.

В (27) се вижда, че в елементите на матрицата  $[c_{23}]$  заградени с пунктирна линия участват параметри от системата с еднакви първи индекси, което показва, че са от една и съща маса. Разделена по този начин матрица  $[c_{23}]$  може да се разглежда като матрица вектор ред (28) елементите на които са две подматрици.

$$(28) \quad \begin{bmatrix} [cn_{34}] & [cn_{35}] \end{bmatrix}$$

Под матрицата  $[cn_{34}]$  отразява връзките жду основната подресорена маса с неподресорените маси на предния мост (мост с индекс едно), а връзките на задния мост от под матрицата  $[cn_{35}]$ . На тяхна база се определя вида на под матриците  $[cn_{nn+n+1,nn+n+1+j}]$ , където променливата  $j = 1, 2, 3, \dots q$ . Тя определя поредният номер на моста на транспортното средство.

Най - общо за  $q$  на брой неподресорени маси матрицата  $[c_{23}]$  може да се представи във вида (29) посредством под матриците  $[cn]$ .

$$(29) \quad \begin{bmatrix} [cn_{nn+n+1,nn+n+2}] & \dots & [cn_{nn+n+1,nn+n+1+q}] \end{bmatrix}$$

На тази база можем да запишем обобщеният вид на матрицата  $[cn_{nn+n+1,nn+n+1+j}]$  за  $j$ -тия мост на транспортното средство матрицата приема вида

$$(30) \quad cn_{nn+n+1,nn+n+1+j} = \begin{bmatrix} -c_{r,j} & -c_{r,j} \\ c_{r,j}b_j & -c_{r,j}b_j \\ -c_{r,j}a_j & -c_{r,j}a_j \end{bmatrix}$$

където  $c_{r,j}$  е коефициента на еластичност на ресорите на колела от  $j$ -тия мост;  $a_j$  е разстоянието от масовия център на тялото на ТС до масовия център на  $j$ -тата неподресорена маса по надлъжната ос X;  $b_j$  е разстоянието от масовия център на тялото на ТС до масовия център на  $j$ -тата неподресорена маса по напречната ос Y.

Матрицата  $[c_{33}]$  може да се разглежда като диагонална матрица от вида

$$(31) \quad \begin{bmatrix} [cn_{44}] & [cn_{45}] \\ [cn_{54}] & [cn_{55}] \end{bmatrix}$$

Под матрицата  $[cn_{44}]$  отразява връзките на неподресорените маси на предния мост (мост с индекс едно) с основната подресорена маса и с въздействията от пътните неравности. с а връзките на задния мост от под матрицата  $[cn_{55}]$ . На тяхна база се определя вида на под матриците  $[cn_{nn+n+1+j,nn+n+1+j}]$ .

Най - общо за  $q$  на брой неподресорени маси матрицата  $[c_{33}]$  може да се представи във вида (32) посредством под матриците  $[cn]$ .

$$(32) \quad \begin{bmatrix} [cn_{nn+n+2,nn+n+2}] & \dots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \dots & [0] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ [0] & \dots & [cn_{nn+n+1+m,nn+n+1+m}] \end{bmatrix}$$

На тази база можем да запишем обобщеният вид на матрицата  $[cn_{nn+n+1+j,nn+n+1+j}]$  за  $j$ -тия мост на транспортното средство матрицата приема вида

$$(33) \quad cn_{nn+n+1+j,nn+n+1+j} = \begin{bmatrix} c_{g,j} + c_{r,j} & 0 \\ 0 & c_{g,j} + c_{r,j} \end{bmatrix}$$

За показаната размерност на подматриците могат да се направят следните разяснения. Тук  $m$  е броя на мостовете. В случай на осем опорна транспортна машина  $q = 8$ . Индексът  $n$  отразява взетите под внимание единични допълнителни подресорени маси. За конкретния случай той е  $n=1$ , а индексът  $m$  отразява взетите под внимание много опорни надресорени маси, в случая  $m=1$  и масата е четири опорна.

Матрицата отразяваща нелинейните съпротивления  $B$  се развива по начина показан за матрицата на еластичността.

3. Заключение

Извършеният анализ на структурата на инерционната, еластичната и матрицата на нелинейните съпротивления, показва възможността за търсене на аналитични връзки между техните членове. Тези връзки дават възможност за автоматизиране на процеса на съставяне на механо – математичния модел (диференциалните уравнения), необходими за описването на един клас динамични системи.

Предлаганият конкретен анализ засяга описанието на динамичното поведение на най-използваните колесни транспортни средства и дава възможност за изследване на техният комфорт.

ЛИТЕРАТУРА

Кунчев Л.П., Яначков Г.М., Схематизация на процеса на изследване на плавността на движение за две, три и четириосни автомобили, Motauto'03, 2003.

Фурунжиев Р.И., Автоматизированное проектирование колебательных систем, Минск, Вышэйшая школа, 1977

Ушкалов В.Ф., Резников Л.М., Редько С.Ф., Статистическая динамика рельсовых экипажей, Киев, Наукова думка, 1982

Ротенберг Р.В., Подвеска автомобиля, Москва, Машиностроение, 1972

Genta G., Motor vehicle dynamics, London, Word Scientific, 1997

Mitsche M., Dynamik der Kraftfahrzeuge, Berlin, Springer, 1984

Castillo J.M., Pintado P., Benitez F.G., Optimization for vehicle suspension, Vehicle System Dynamics, 19 (1990), pp.331-352

Sharp R.S. Use of the symbolic multibody modeling code AUTOSIM for vehicle dynamics, Automotive Vehicle Technologies, AUTOTECH'97, Mech. Eng. Publ., 1997-7, pp. 189-197

FORMAL INVESTIGATION THE DYNAMIC COMFORT FOR SIGLE VEHICLES WITH TWO, THREE AND MORE DRIVING (DRIVEN) AXLES, ALL SUPENDED MASSES ACCOUNT PART I

Lilo KUNCHEV

Krasimir NEDELICHEV

[Lkunchev@tu-sofia.bg](mailto:Lkunchev@tu-sofia.bg)

[Krasined@tu-sofia.bg](mailto:Krasined@tu-sofia.bg)

Dept. Engines, Automobiles and Transport, Technical University - Sofia, 1000, BULGARIA  
Dept. Engines, Automobiles and Transport, Technical University - Sofia, 1000, BULGARIA

*In the paper are studied one class of vehicle transport unite. The equation of motion this unit can described with system of matrix equation like  $M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F(t)$ . Here is done structural analyses on the elements of the matrices  $M$ ,  $B$  and  $C$ . The analysis proofs analytical dependents among the elements of the matrices. This dependents dives possibility to create algorithm for obtaining the differential equations of motion without using Lagrange's method.*

A

1.3

на  
др.  
на  
др.  
ко.  
ма

(1)

ст.  
ма  
сп  
вх  
пр  
е  
М,  
на  
об  
ви  
пр

мс  
на  
ви

на