Годишник на Технически Университет – София, том 70, книга 3, 2020
Proceedings of the Technical University – Sofia, Volume 70, Issue 3, 2020

СИСТЕМНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА СИСТЕМИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ

Камен Перев

Резюме: *Докладът разглежда задачата за моделиране на системи с разпределени параметри. Представени са основните типове модели, които се определят от типа на частното диференциално уравнение определящо динамиката на физическите процеси. Дискутирани са приликите и разликите по отношение на моделите, които произтичат от обикновени диференциални уравнения. Особено внимание е отделено на задачата, която се описва чрез параболичното диференциално уравнение на топлопроводност. Представена е постановката на тази задача и са дискутирани методите за нейното решаване. Представени са и основните характеристики от системна гледна точка, които характеризират тази задача, а именно функцията на Грийн и предавателната функция. Изследвани са различните случаи на тези характеристики в зависимост от специфичния вид на частното диференциално уравнение, както и различните начални и гранични условия.*

Ключови думи**:** *уравнение на топлопроводност, функция на Грийн, предавателна функция на система с разпределени параметри*

SYSTEM CHARACTERISTICS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

Kamen Perev

Abstract: *The paper considers the problem of distributed parameter systems modeling. The basic model types are presented, depending on the partial differential equation, which determines the physical processes dynamics. The similarities and the differences with the models described in terms of ordinary differential equations are discussed. A special attention is paid to the problem of heat flow in a rod. The problem set up is demonstrated and the methods of its solution are discussed. The main characteristics from system point of view are presented, namely the Green function and the transfer function. Different special cases for these characteristics are discussed, depending on the specific partial differential equation, as well as the initial conditions and the boundary conditions.*

Keywords**:** *heat flow equation, Green function of PDE, transfer function of a distributed parameter system*

ISSN 1311-0829
DOI 10.47978/TUS.2020.70.03.018

1. ВЪВЕДЕНИЕ

В повечето случаи за анализ на системи за управление, моделът на системата се описва чрез обикновени диференциални уравнения. При тези модели, сигналите в затворения контур са функция на една независима променлива, а именно времевата променлива. В някои случаи обаче, физическата същност на сигналите зависи както от времевата променлива, така и от пространствените координати, в които се изследват процесите. Такъв тип явления се описват с частни диференциални уравнения, при които описанието е функция на повече от една променлива. Съответните системи за управление, чиято динамика се описва чрез частни диференциални уравнения се наричат системи с разпределени параметри. Наименованието системи с разпределени параметри се определя от факта, че физическите величини характеризиращи описваните явления са разпределени по пространствените си координати. При това се наблюдават съществени изменения на системните характеристики на такъв тип системи. Докато предавателните функции на системи със съсредоточени параметри са рационални функции на лапласовата променлива, то при системите с разпределени параметри, предавателните функции са ирационални функции [3]. Друга основна разлика е, че размерността на пространството на състоянията при системи с разпределени параметри е безкрайномерно за разлика от крайната размерност на пространството при системи със съсредоточени параметри [3]. Безкрайната размерност на ирационалните предавателни функции води до наличието на безкраен брой полюси и нули, или пък до такива случаи, при които полюси и нули липсват въобще в описанието. Когато предавателната функция на разглежданата система е изведена от диференциални уравнения с частни производни, тогава разположението на полюсите и нулите често зависи от граничните условия на разглежданата задача. Друга особеност на ирационалните предавателни функции е тяхното поведение, когато лапласовата променлива клони към безкрайност [3]. В тези случаи може да съществува нееднозначност на граничните точки в зависимост от разположението на кривата на сходимост в комплексната равнина. Много често, сходимостта на ирационалната функция по протежение на реалната ос се различава от сходимостта на същата функция по протежение на имагинерната ос. Същевременно, дефинициите дадени за рационални предавателни функции много често вече не са валидни в ирационалния случай. Така например, предавателната функция на елемент с чисто закъснение не е минимално фазова въпреки, че няма дефинирани нули. За да бъде дадена предавателна функция минимално фазова е необходимо да има крайна относителна степен, което условие не винаги е изпълнено за ирационални предавателни функции.

Характерна особеност на системите с разпределени параметри е описанието им с частни диференциални уравнения [2]. Уравненията с частни производни могат да бъдат класифицирани по отношение на различни признаци. На първо място такъв признак е редът на уравнението, който се определя от най-високия ред на частните производни. Друг признак е броят на независимите променливи в диференциалното уравнение. Тъй като диференциалното уравнение е с частни производни, броят на променливите ще бъде най-малко две: едната променлива е времевата променлива, а другата променлива е пространствена. Аналогично със случая на обикновени диференциални уравнения, частните диференциални уравнения могат да бъдат линейни или нелинейни. Така например, линейно диференциално уравнение от втори ред с две независими променливи се нарича уравнението от вида [2]:

$$au_{tt} + bu_{tx} + cu_{xx} + du_t + eu_x + fu = g \tag{1}$$

Уравнението (1) се нарича хомогенно, ако дясната му част е тъждествено равна на нула или с други думи, $g(t, x) = 0$ за всяко t или x. Ако това условие не е изпълнено, уравнението се нарича нехомогенно. В зависимост от съотношенията, които съществуват между параметрите в уравнение (1), диференциалните уравнения от втори ред се разделят на три типа: параболични, хиперболични и елиптични. Уравненията от параболичен тип се подчиняват на условието: $b^2 - 4ac = 0$. Такъв тип уравнения описват процесите на топлопроводност и дифузия. Уравненията от хиперболичен тип изпълняват условието: $b^2 - 4ac > 0$. Хиперболични диференциални уравнения се използват за описание на системи с колебателни процеси и вълнови движения. Уравненията от елиптичен тип описват установяващи се процеси и се определят от условието $b^2 - 4ac < 0$. Решението на всеки тип от горе описаните уравнения зависи както от вида на диференциалното уравнение, така и от граничните условия, характеризиращи пространствените условия при които задачата е дефинирана. За представяне на системните характеристики при задачи описани чрез частни диференциални уравнения, ще се спрем на конкретен тип описание чрез параболично диференциално уравнение на задачата за пренасяне на топлина.

2. ОБЩА ФОРМУЛИРОВКА НА ЗАДАЧАТА ЗА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

В термодинамиката, изменението на вътрешната енергия на една физическа система се определя от работата извършена над системата от външните сили и количеството топлина, което получава системата. Обикновено, топлината се предава към системата през границите ѝ, но може да съществуват и вътрешни източници на топлина. Топлината произведена или предадена в една област на системата, постепенно се разпространява в цялата система. Процесът на пренасяне на топлина от по-нагрети към по-малко нагрети части е свързан с изменението на температурата в различните части на тялото. Затова описанието на такъв тип физическо явление се свежда до определяне на температурно поле в изследваното тяло. Топлопренасянето е частен случай на пренасяне на субстанция. При топлопренасянето, субстанцията на пренасянето е плътността на топлинната енергия. Потенциал при топлопренасянето е температурата, като важна задача в топлопренасянето е установяване на зависимост между топлинния поток и температурата. Характерът на тази зависимост зависи от трите възможни форми на топлопренасяне: топлопроводност, конвекция и излъчване. Топлопроводността е свързана с пренасяне на топлинна енергия от микроскопичните елементи на системата на ниво молекули.

За извеждане на уравнението на топлопроводността се правят следните допускания [4]. Топлопроводността се изследва в цилиндричен прът, който има достатъчно голяма дължина. Външната повърхност на пръта е изолирана, т.е. топлината може да преминава само през сечението на пръта. Първоначално, прътът се държи при постоянна температура достатъчно дълго време така, че температурата на пръта да се изравни със средата. В краищата на пръта се поставят два термоелемента, чиято задача е чрез загряване и охлаждане да поддържат постоянна температура там, където са поставени. Целта на изследването е да се определи профила на температурата в пръта при зададени начални условия, описващи състоянието на системата в началото на процеса, и гранични условия, описващи процеса на топлообмен в граничните точки. Така задачата за определяне на процеса на топлопроводност се дефинира чрез задаване на диференциалното уравнение, граничните и началните условия. Едномерното уравнение на топлопроводността е частно диференциално уравнение от параболичен тип по отношение на една пространствена променлива и се задава в следния вид [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \tag{2}$$

където α^2 е коефициент на топлопроводност на материала, L е дължината на пръта, $u(x,t)$ определя температурния профил в пръта, $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t[°C/sec]$ представлява скоростта на изменение на температурата по време, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}[°C/m^2]$ задава мярката за разликата на температурата в дадена точка спрямо съседните точки и $f(x,t)$ характеризира влиянието на вътрешен източник на топлина. Ако $u(x,t)$ е равна на средната стойност на температурата в две съседни точки, тогава $u_{xx} = 0$. Уравнение (2) представлява законът на Фурие за топлопроводността и описва дифузията на топлинна енергия от по-топлата към по-студената част на веществото. Трябва да се подчертае, че същото уравнение описва не само топлинна, а всякакъв тип дифузия като например химическа дифузия между различни субстанции. По-нататък ще бъде показано, че ако в дясната част на уравнението се прибави първата производна u_x, тогава уравнение (2) ще описва и конвекцията на топлинна енергия. Конвекцията представлява преместването на веществото заедно със средата. С прибавения нов член от дясната страна на уравнение (2), описаното явление придобива наименованието уравнение на конвективна дифузия [4].

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \tag{3}$$

Ако топлообменът се осъществява през страничната повърхност на пръта, уравнението на топлопроводност добива вида [4]:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty, \tag{4}$$

където при $\beta > 0$ са налице условия за отделяне на топлина от пръта към средата, а при $\beta < 0$ се осъществява приемане на топлина от средата към пръта, като с u_0 означаваме температурата на околната среда.

Граничните условия на задачата описана чрез уравнение (2) могат да бъдат зададени във вида:

$$\text{ГУ: } \begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(L,t) = T_2 \end{cases}, \quad 0 < t < \infty \tag{5}$$

Както се вижда в случая приемаме, че граничните условия са постоянни, т.е. на границата на пръта температурата приема постоянни стойности. Възможно е граничните условия да бъдат функция на времето, като например $u(0,t) = g_1(t)$ и $u(L,t) = g_2(t)$. Същевременно, възможно е като гранични условия да се дефинират производните на температурата като например $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = g(t)$. Производните на температурата при граничните условия определят дали топлинният поток влиза или излиза през границата на пръта: ако $k\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, потокът е влизащ в пръта, а ако $k\frac{\partial u}{\partial x} < 0$, тогава топлинният поток е излизащ от пръта. Ако по топло изолираните граници не минава никакъв топлинен поток, тогава нормалната производна приема нулева стойност. Често топлинният поток на границата се задава във вида: $u_x(0,t) = \mu[u(0,t) - g_1(t)]$ и съответно $u_x(L,t) = -\mu[u(L,t) - g_2(t)]$.

Третата група съставни компоненти на задачата за топлопроводност са началните условия:

$$\text{НУ: } u(x,0) = T_0, 0 < x < L \tag{6}$$

Началните условия определят стойностите на температурата в пръта в началния момент от време. Възможно е началните условия да бъдат функция на пространствените координати като например $u(x,0) = \varphi(x)$.

3. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЕТО НА ТОПЛОПРОВОДНОСТ

В тази част ще бъде направен кратък преглед на методите за решаване на уравнението на топлопроводност. Получените решения зависят изключително много от вида на граничните и началните условия при дефиниране на задачата.

Един от основните методи за решаване на уравнението на топлопроводността е методът на разделяне на променливите. Този метод се прилага при линейни, хомогенни уравнения с постоянни коефициенти. Така диференциалното уравнение приема вида: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ при $0 < x < L$, $0 < t < \infty$. Граничните условия се задават във вида: $\beta u_x(0,t) + \gamma u(0,t) = 0$ и $\lambda u_x(L,t) + \mu u(L,t) = 0$. Ако топлинният поток през границата е нула, тогава граничните условия приемат опростената форма: $u(0,t) = 0$ и $u(L,t) = 0$. Началното условие приема вида: $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 < x < L$. Решението на диференциалното уравнение се търси във вида: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Ако приемем, че фундаменталните решения са от вида $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, то тогава общото решение, което удовлетворява началните и граничните условия, се дава във вида $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)T_n(t)$. Методът може да се раздели на следните стъпки. Най-напред се намира елементарно решение на уравнението с частни производни: $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$, откъдето $\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ и тъй като променливите t и x са независими една от друга, горното неравенство се приравнява на константа. Общото решение на частното диференциално уравнение се получава във вида [4]:

$$u(x,t) = e^{-\gamma^2\alpha^2 t}[A\sin(\gamma x) + B\cos(\gamma x)] \tag{7}$$

Втората стъпка е да се намери решение удовлетворяващо граничните условия: $u(0,t) = 0$ и $u(L,t) = 0$. Така получаваме: $u(0,t) = Be^{-\gamma^2\alpha^2 t} = 0$ или $B = 0$, $u(L,t) = Ae^{-\gamma^2\alpha^2 t}\sin(\gamma L) = 0$ или $\gamma = \pm\frac{\pi}{L}, \pm\frac{2\pi}{L}, \cdots$. Последната стъпка е да се намери такава сума от решения, че да се удовлетворяват началните условия, т.е. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ трябва да удовлетворява началните условия $u(x,0) = \varphi(x)$ или $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Въпросът е дали е възможно началната температура да се разложи в ред от елементарни функции: $c_1\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + c_2\sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) + \cdots$. Това е ред на Фурие, като решението се дава във вида [4]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8}$$

където

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{9}$$

Ако уравнението с частни производни е нехомогенно, т.е. $u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x,t)$, тогава решението се търси чрез разложение по собствени функции или чрез метода на интегралните преобразования. Нека първо разгледаме случая, когато диференциалното уравнение с частни производни е хомогенно, но граничните условия включват производната по пространствената променлива: $u(0,t) = 0$ и $u_x(1,t) + hu(1,t) = 0$. По метода на разделяне на променливите се получава общото решение $u(x,t) = e^{-(\lambda\alpha)^2 t}[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]$. От първото гранично условие се получава $B = 0$, а от второто гранично условие се получава уравнението $A\lambda e^{-(\lambda\alpha)^2 t}\cos\lambda + hAe^{-(\lambda\alpha)^2 t}\sin\lambda = 0$. Решението на това уравнение се получава във вида $\tan\lambda = -\frac{\lambda}{h}$, което е изпълнено за различни стойности на λ: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. Тези стойности се наричат собствени стойности на краевата задача. Решенията на задачата, съответстващи на различните собствени стойности λ_n се наричат собствени функции: $X_n(x) = \sin(\lambda_x x)$. Ако граничните условия са от пообщ тип: $a_1u_x(0,t) + b_1u(0,t) = 0$ и $a_2u_x(1,t) + b_2u(1,t) = 0$, тогава решението се дава във вида: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ или посредством собствените стойности и собствените функции: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t}X_n(x)$.

При нехомогенната задача: $u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x,t)$, където $f(x,t)$ представлява източник на топлина разположен вътре в пръта, плътността на източника се описва чрез ред от собствени функции: $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x)$. Пълното решение на тази задача се дава във вида [4]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)\int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau.$$

Друг метод за решаване на частни диференциални уравнения е чрез използване на интегрални преобразования. Широко разпространение за решаване на такъв тип задачи намират редове и преобразования на Фурие. Редовете на Фурие се използват, когато решението е периодична функция. Когато решението не е периодична функция и е определена на интервала $(-\infty, \infty)$, тогава редът на Фурие преминава в преобразование на Фурие.

4. ОСНОВНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЗАДАЧАТА ЗА РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЕТО НА ТОПЛОПРОВОДНОСТ

При апроксимация на непериодични функции дефинирани на безкраен интервал, се използва интегралът на Фурие. Интегралът на Фурие е непрекъсната реализация на реда на Фурие, като дискретният честотен спектър се преобразува в непрекъснат. Комплексната форма на интеграла на Фурие е преобразованието на Фурие. Широкото разпространение на преобразованието на Фурие за намиране на решението на диференциалното уравнение се определя от факта, че операцията диференциране се заменя с умножение, при което диференциалните уравнения се превръщат в алгебрични. Нека разгледаме основното уравнение $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. Тогава, след прилагане на преобразование на Фурие по отношение на променливата x, за двете страни на уравнението можем да запишем:

$$\mathcal{F}[u_t] = \alpha^2 \mathcal{F}[u_{xx}], \quad \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)] \tag{10}$$

където

$$\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)\, e^{-j\xi x} dx = j\xi \mathcal{F}[u],$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-j\xi x} dx = -\xi^2 \mathcal{F}[u], \tag{11}$$

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, e^{-j\xi x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u], \tag{12}$$

$$\mathcal{F}[u_{tt}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x,t) e^{-j\xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{F}[u] \tag{13}$$

Означаваме чрез $\mathcal{F}[u(x,t)] = U(t)$. Тогава уравнения (10) можем да запишем във вида [4]:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\alpha^2 \xi^2 U(t), \quad U(0) = \Phi(\xi) \tag{14}$$

Функцията $U(t)$ зависи не само от променливата t, но и от променливата ξ, която в случая е константа. След решаване на преобразуваната задача се получава следният израз [4]:

$$U(t) = \Phi(\xi) e^{-\alpha^2 \xi^2 t} \tag{15}$$

Следващата стъпка е чрез обратно преобразование на Фурие да се намери решението на първоначалната задача:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\xi,t)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(\xi) e^{-\alpha^2 \xi^2 t}\right] \tag{16}$$

Така за решението на уравненията (10) се получава [4]:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\xi,t)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2 t}\right] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\xi)] * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\alpha^2\xi^2 t}\right] =$$

$$\varphi(x) * \left[\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}\right] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi \qquad (17)$$

Формулата (17) представлява решението на задачата на Коши, описана с частното диференциално уравнение и началното условие. От представеното решение се вижда ясно, че подинтегралната функция се състои от две части: началната температура (задаваща началното условие) и функцията [1]:

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} \qquad (18)$$

Функцията $G(x,\xi;t)$ се нарича функция на източника или функция на Грийн. Функцията на Грийн описва реакцията на системата при единичен топлинен импулс в точката $x = \xi$. С други думи, функцията на Грийн описва разпределението температурата в пръта в момента t, ако в точката $x = \xi$ се подаде единичен топлинен импулс. Началното условие $u(x,0) = \varphi(x)$ може да се представи като непрекъснато множество от точкови импулси всеки с големина $\varphi(\xi)$ в точката $x = \xi$. Така всеки точков импулс възбужда температурното разпределение $\varphi(x) * G(x,\xi;t)$, което в случая се определя от съотношението:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi \qquad (19)$$

Функцията на Грийн е важна характеристика на системи с разпределени параметри. Тя е еквивалент на тегловната характеристика при системи със съсредоточени параметри. Функцията на Грийн дава пълна информация за поведението на системата в пространствено-времева координатна система. Приложимостта на функциите на Грийн се определя от факта, че те преобразуват изходното диференциално уравнение в интегрално уравнение. Функцията на Грийн може да се разглежда като реакция на системата при импулсно входно въздействие от вида $f(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$. Функцията на Грийн зависи както от описващото диференциално уравнение с частни производни, така и от зададените гранични и начални условия. Така например, функцията на Грийн (18) е получена за диференциално уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ при начални условия $u(x,0) = \varphi(x)$ и гранични условия $u(0,t) = 0$ и $u(L,t) = 0$. Ако променим граничното условие в началната точка във вида $u(0,t) = g(t)$, тогава функцията на Грийн добива вида [1]:

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}}\right] \qquad (20)$$

Подобна е функцията на Грийн, когато в точката $x = 0$ се променя като функция на времето не граничното условие $u(0,t)$, а нейната производна по пространствената координата във вида $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t)$. Тогава функцията на Грийн придобива вида [1]:

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2 t}}\right] \tag{21}$$

Ако променим и другото гранично условие, т.е. $u(0,t) = g_1(t)$ и $u(L,t) = g_2(t)$, тогава функцията на Грийн добива вида [1]:

$$G(x,\xi;t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi\xi}{L} e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \tag{22}$$

Важна роля при решаване на диференциалното уравнение с частни производни има преобразованието на Лаплас. Основното преимущество на преобразованието на Лаплас пред преобразованието на Фурие е фактът, че в подинтегралния израз участва бързо затихващ множител, което прави преобразованието на Лаплас приложимо към по-широк клас функции в сравнение с преобразованието на Фурие. Преобразованието на Лаплас е едно от мощните средства за преобразуване на частни диференциални уравнения в обикновени диференциални уравнения. Лапласовото преобразование се прилага най-често към времевата променлива, като при това, обикновеното диференциално уравнение се преобразува в алгебрично уравнение. Методът за решаване на уравнения чрез лапласово преобразование е аналогичен на този използващ преобразование на Фурие. Нека разгледаме следната стационарна задача: $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$, при гранични условия $u_x(0,t) - u(0,t) = 0$ и начално условие $u(x,0) = u_0$. След прилагане на преобразование на Лаплас върху двете страни на диференциалното уравнение се получава уравнението $sU(x,s) - u_0 = \frac{d^2U}{dx^2}$, с гранично условие $\frac{dU}{dx}(0) = U(0)$ като второто гранично условие се получава от физически съображения $U(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Решението на горното уравнение се получава във вида:

$$U(x,s) = Ae^{x\sqrt{s}} + Be^{-x\sqrt{s}} + \frac{u_0}{s} \tag{23}$$

като след отчитане на граничните условия се определят константите A и B и се получава изразът [4]:

$$\hat{G}(x,s) = u_0\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+1)}\right] + \frac{1}{s} \tag{24}$$

Изразът (24) се нарича предавателна функция на дадената задача, където преобразованието на Лаплас се осъществява по време на функцията на Грийн:

$$\hat{G}(x,s) = \int_0^{\infty} G(x,t)e^{-st}dt \tag{25}$$

За да намерим решението на диференциалното уравнение при дадените гранични и начално условие, е необходимо да изчислим обратното преобразование на Лаплас, при което се получава:

$$u(x,t) = u_0 - u_0\left[erfc\left(\frac{x}{2}\sqrt{t}\right) + erfc\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2}\sqrt{t}\right)e^{x+t}\right], \tag{26}$$

където $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\sigma^2} \, d\sigma$. Нека приемем, че търсим решението на задачата $c_p \rho u_t = K_0 u_{xx}$, , $0 < x < L$, $0 < t < \infty$, при гранични условия $u_x(0,t) = 0$ и $K_0 u_x(L,t) = g(t)$, където K_0 се нарича термична кондуктивност, c_p е специфичната топлина и ρ е масовата плътност, като $\frac{K_0}{c_p \rho} = \alpha^2$ (коефициентът на топлопроводност). Решението на диференциалното уравнение се получава във вида:

$$U(x,s) = \mathrm{A} \sinh\left(\frac{x\sqrt{s}}{\alpha}\right) + B \cosh\left(\frac{x\sqrt{s}}{\alpha}\right), \tag{27}$$

Като се отчетат граничните условия, решението се определя от израза [3]:

$$U(x,s) = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{x\sqrt{s}}{\alpha}\right)}{K_0 \sqrt{s} \sinh\left(\frac{L\sqrt{s}}{\alpha}\right)} \hat{g}(s)$$

Тогава, предавателната функция на задачата се дава във вида [3]:

$$\hat{G}(x,s) = \frac{U(x,s)}{\hat{g}(s)} = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{x\sqrt{s}}{\alpha}\right)}{K_0 \sqrt{s} \sinh\left(\frac{L\sqrt{s}}{\alpha}\right)} \tag{28}$$

Трябва да се отбележи, че предавателната функция е функция на лапласовата променлива s, където в (28) x може да се разглежда като параметър определящ точката на наблюдение. Полюсите на предавателната функция са нулите на израза в знаменателя, които в случая са реалните числа $-(n\pi\alpha)^2/L^2$, докато нулите са нули на числителя и се определят чрез $-[(n\pi + \pi/2)\alpha]^2/x^2$, където $n = 0,1,2,\cdots$. Поради наличието на полюс в нулата, предавателната функция не е входно/изходно устойчива, но е правилна е добре определена. Имайки в предвид разпределението на полюсите, можем да представим предавателната функция чрез развитие в безкраен ред във вида [3]:

$$\hat{G}(x,s) = \frac{\alpha^2}{K_0 L s} + \frac{2L}{K_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi x/L)}{L^2 s + (n\pi\alpha)^2}$$

Същата предавателна функция можем да представим и във вида [3]:

$$\hat{G}(x,s) = \frac{\alpha e^{\frac{(x-L)\sqrt{s}}{\alpha}}}{K_0 \sqrt{s}} \cdot \frac{\left(1 + e^{-\frac{2x\sqrt{s}}{\alpha}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2L\sqrt{s}}{\alpha}}\right)}$$

От този израз непосредствено следа, че ако $x = L$, за всяко реално λ, достатъчно голямо е изпълнено $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \sqrt{\lambda}\, \hat{G}(L,s) = \frac{\alpha}{K_0}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Този доклад разглежда задачата за моделиране на системи с разпределени параметри. Показани са различни типове модели в зависимост от типа на разглежданото диференциално уравнение с частни производни. Дискутирани са основните прилики и разлики при модели със съсредоточени и разпределени параметри. Основните разглеждания са свързани със задачата за изследване на физическите процеси описани чрез уравнението за топлопроводност. Представени са такива системни характеристики като функцията на Грийн и предавателната функция. Показана е връзката на тези системни характеристики с преобразованията на Фурие и Лаплас. Изведени са различни описания на системните характеристики в зависимост от граничните и началните условия, както и от вида на диференциалното уравнение с частни производни. Дискутирани са такива понятия като полюси и нули на предавателната функция, условията за устойчивост и каузалност.

Изследванията в този доклад са частично финансирани от катедра „*Системи и управление*“, факултет по *Автоматика*, *Технически Университет – София*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бутковский, А., Характеристики систем с распределенными параметрами, Наука, М., 1979

[2] Мартинсон, Л., Ю. Малов, Дифференциальные уравнения математической физики, Изд. МГТУ им. Баумана, 2006

[3] Curtain, R., K. Morris, “Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial”, Automatica, vol. 45, pp. 1101-1116, 2009

[4] Farlow, S., Partial differential equations for scientists and engineers, John Wiley & sons, N.Y., 1982

Автор: *Камен Перев,* доц. д.т.н., Технически университет-София, Факултет Автоматика, катедра Системи и управление,
e-mail: kperev@tu-sofia.bg

Author: *Assoc. prof. D. Sc. Kamen Perev,* Technical University of Sofia, Faculty of Automatics, dept. Systems and Control,
e-mail: kperev@tu-sofia.bg